Los Grandes Matemáticos

E. T. Bell

Libros Tauro

ACLARACIONES

Sin numerosas notas en pie de página sería imposible citar a los diversos autores que han intervenido en los hechos históricos mencionados en las siguientes páginas. Sin embargo, la mayor parte del material consultado sólo puede encontrarse en las grandes bibliotecas universitarias, y en su mayor parte se trata de trabajos escritos en lenguas extranjeras. Para los datos principales y los hechos esenciales de la vida de cada individuo he consultado las notas necrológicas (cuando se trata de autores modernos). Tales notas han sido publicadas en las actas de las sociedades doctas de las cuales el individuo en cuestión era miembro. Otros detalles de interés se hallan en la correspondencia entre los matemáticos y en sus obras completas. Aparte de algunos bajos especiales, han sido particularmente útiles para nuestro objeto las siguientes revistas:

1. Las numerosas notas históricas y trabajos publicados en el *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (Sección de Historia de la Matemática).
2. El mismo tipo de trabajos en *Bibliotheca Mathematica.*

Sólo tres fuentes de información necesitan mención especial. La vida de Galois está basada sobre el clásico relato de P. Dupuy en los *Annales scientifiques de l'École normale*, (3ª serie, tomo XIII, 1896), y las notas editadas por Jules Tannery. La correspondencia entre Weierstrass y Sonja Kowalewski fue publicada por Mittag-Leffler en las *Acta Mathematica* (también en parte en las *Comptes rendus du 2me Congres internacional des Mathématiciens.* Paris, 1902). Muchos de los detalles referentes a Gauss han sido tomados del libro de W. Sartorius von Waltershausen, *Gauss zum Gedächtniss*, Leipzig, 1856.

Sería excesivo pretender que todas las fechas o la forma de escribir los nombres propios han sido correctas. Las fechas han sido mencionadas principalmente con el fin de orientar al lector acerca de la edad del individuo cuando hizo sus inventos más originales. En cuanto a la forma de escribir los nombres propios confieso mi falta de competencia para resolver, por ejemplo, si debe escribirse Utzendorff, Uitzisdorf o de otra manera, pues cada una de estas formas es admitida por autoridades indiscutibles. Cuando ha habido que elegir entre James y Johann, o entre Wolfgang y Farkas, he seguido el camino más fácil para identificar a la persona de que se trata.

La mayor parte de los retratos son reproducciones de los que se encuentran en la colección David Eugene Smith de la Columbia University. El retrato de Newton es una media tinta original que nos ha sido facilitada por el profesor E. C. Watson. Los dibujos han sido correctamente hechos por Mr. Eugene Edwards.

En una ocasión anterior (*La busca de la verdad),* he tenido el gusto de agradecer al doctor Edwin Hubble y a su mujer Grace su auxilio impagable. Asumo toda la responsabilidad de los juicios expuestos en el libro, aunque de todos modos me ha sido de gran ayuda la crítica docta (aunque no siempre haya sabido hacer buen uso de ella) de dos especialistas en campos en que no puedo pretender tener autoridad, y confío en que sus críticas constructivas habrán salvado mis deficiencias. El doctor Morgan Ward también ha hecho la crítica de algunos de los capítulos, y a él debo sugestiones muy útiles sobre cuestiones que él conoce. Toby, como en otras ocasiones, ha contribuido en alto grado en esta obra; en deuda de gratitud le he dedicado el libro, que es tanto de ella como mío.

Finalmente, deseo agradecer su colaboración a las autoridades directivas de diversas bibliotecas, que generosamente me han prestado libros raros y material biográfico. En particular debo dar las gracias a los bibliotecarios de la Stanford University, de la Universidad de California, de la Universidad de Chicago, de la Harvard University, de la Brown University, de la Princeton University, de la Yale University, de The John Crerar Library (Chicago), y del Instituto de Tecnología de California.

E. T. Bell

Capítulo Primero
INTRODUCCIÓN

Hemos titulado esta sección introducción y no prefacio (como realmente es) con la esperanza de que lo lean quienes habitualmente pasan por alto los prefacios, pues, al menos, en los siguientes párrafos, se encontrará el lector con la primera fila de estrellas antes de entrar a conocer algunos de los grandes matemáticos. Debemos hacer notar en primer término que este libro no es en modo alguno una historia de la Matemática, ni siquiera una parte de esa historia.

Las vidas de los matemáticos aquí presentados están dirigidas al lector común y a aquellos otros que quieren saber qué tipo de seres humanos son los hombres que han creado la Matemática moderna. Nuestro objeto es dar a conocer algunas de las ideas dominantes que gobiernan amplios campos de las Matemáticas y hacerlo a través de las vidas de los hombres autores de estas ideas.

Para seleccionar los nombres se han seguido dos criterios: la importancia para la Matemática moderna de la obra de un hombre y el sentido humano de la vida y carácter del hombre. Algunos matemáticos pueden ser estudiados siguiendo esos dos criterios, por ejemplo: Pascal, Abel y Galois; otros, como Gauss y Cayley, principalmente atendiendo al primero, aunque ambos tienen vidas interesantes. Cuando estos criterios chocan o se superponen, como es el caso cuando hay varios pretendientes al recuerdo de un progreso particular, se ha dado preferencia al segundo criterio, pues aquí nos interesan los matemáticos, en primer término, como seres humanos.

En los últimos años se ha despertado un enorme interés general por la ciencia, particularmente por la ciencia física y su influencia sobre nuestro esquema filosófico del Universo rápidamente cambiante.

Numerosos y excelentes resúmenes de las conquistas de la ciencia, escritos en el lenguaje menos técnico posible, han servido para salvar la laguna entre el científico profesional y quienes dedican sus vidas a otras tareas. En muchas de estas exposiciones, especialmente las que se refieren a la relatividad y a la teoría moderna de los cuantos, surgen nombres que no puede esperarse sean familiares al lector común, Gauss, Cayley, Riemann y Hermite, por ejemplo. Conociendo quiénes eran estos hombres, el papel que han desempeñado para preparar el crecimiento explosivo de la ciencia física desde el año 1900, y apreciando sus ricas personalidades, las magníficas conquistas de la ciencia caen en la perspectiva del lector común y adquieren una nueva significación.

Los grandes matemáticos han desempeñado un papel en la evolución del pensamiento científico y filosófico comparable al de los filósofos y hombres de ciencia. Retratar los rasgos esenciales de esa evolución a través de las vidas de los grandes matemáticos, mencionando: al mismo tiempo algunos de los problemas dominantes en su época, constituyen el propósito de los capítulos siguientes. Haremos resaltar la importancia de la Matemática moderna, es decir, esas grandes y simples ideas directrices del pensamiento matemático, que son aún de tal importancia en la vida, en la ciencia creadora y en la Matemática.

No debemos creer que la única función de la Matemática,"la sirvienta de las ciencias", es servir a la ciencia. La Matemática también ha sido denominada "la reina de las ciencias". Si alguna vez la reina ha parecido mendigar de las ciencias, ha mendigado en forma muy orgullosa, ni ha pedido ni ha aceptado favores de ninguna de sus ciencias, hermanas más influyentes. Lo que ella adquiere ella lo paga. Los matemáticos tienen una visión y una sabiduría particular, por encima de cualquier aplicación posible a la ciencia, y suficientemente premiada cuando cualquier ser humano inteligente llega a vislumbrar lo que la Matemática significa por sí misma. No se trata de la vieja doctrina del arte por el bien del arte, sino del arte para el bien de la humanidad. En realidad, el propósito de la ciencia no es la tecnología y Dios sabe que ya hemos divagado bastante. La ciencia explora también profundidades de un Universo que ni siquiera con la

imaginación será visitado por los seres humanos, ni afectará nuestra existencia material. Así, nos ocuparemos también de algunas cosas que los grandes matemáticos han considerado dignas de una cordial comprensión, por su belleza intrínseca.
Se dice que Platón hizo escribir en la entrada de su academia las Siguientes palabras: "*Que ningún ignorante de la Geometría entre aquí*". En este lugar no necesitamos hacer una advertencia semejante y bastará una palabra de aviso para salvar de innecesarias angustias a algunos lectores excesivamente concienzudos... Lo principal de esta historia es la vida y personalidad de los creadores de la Matemática moderna y no la serie de formas y diagramas esparcidos en el texto. Las ideas básicas de la Matemática moderna, con las cuales se ha tejido por millares de investigadores la vasta e intrincada complejidad, son simples, de ilimitados alcances y pueden ser comprendidas por cualquier ser humano de inteligencia normal.
Lagrange (del que nos ocuparemos más tarde) creía que un matemático no llegaba a comprender totalmente su obra hasta que quedaba tan clara que podía ser explicada fácilmente al primer hombre que encontrara en la calle.
Como es natural, esto es un ideal que no siempre se alcanza. Pero haremos notar que pocos años antes que Lagrange pronunciara esas palabras, la "ley" newtoniana de gravitación era un incomprensible misterio hasta para las personas instruidas. En la actualidad la "ley" newtoniana es un lugar común que todas las personas educadas aceptan como sencilla y verdadera. Hoy la teoría relativista de la gravitación de Einstein se halla donde estaba la "ley" de Newton en las primeras décadas del siglo XVIII. Mañana la teoría de Einstein parecerá "tan natural", como la "ley" de Newton parece hoy. Con la ayuda del tiempo el ideal de Lagrange no es inalcanzable.
Otro gran matemático francés, consciente de sus dificultades no menos que sus lectores, aconsejaba a los hombres concienzudos no prestar demasiado tiempo a las cuestiones difíciles sino "seguir adelante y ya acudirá la fe". En breve, si alguna vez una fórmula, diagrama o un párrafo parece demasiado técnico, pasarlo por alto. Los estudiantes de la Matemática están familiarizados con el fenómeno del "desarrollo lento" o asimilación subconsciente. Cuando algo nuevo se estudia por primera vez, los detalles parecen numerosos y confusos, y no queda fijada en la mente una impresión lógica del conjunto. Después de un tiempo insistamos en el estudio y encontraremos que todo ha ido ocupando un lugar según su importancia, igual que cuando se revela una placa fotográfica. La mayoría de los que abordan seriamente por Primera vez la Geometría analítica experimentan dificultades de ese tipo. En cambio, el Cálculo, con sus fines claramente establecidos desde el comienzo, es de ordinario rápidamente comprendido. Hasta los matemáticos profesionales muchas veces pasan rozando sobre la obra de otros, para obtener un concepto amplio y comprensivo, antes de concentrarse sobre los detalles de interés para ellos. Pasar por alto no es un vicio como algunos de nosotros han creído, debido a nuestros profesores puritanos, sino una virtud del sentido común.
Yo creo que puede decirse honradamente que basta un curso de Matemática en una Escuela superior para tener los conocimientos matemáticos necesarios que permiten comprender muchas cosas que algunos cautamente pasan por alto. Con frecuencia son mencionadas cuestiones que están más allá de ese curso, pero siempre se acompañan de una descripción que capacita para comprenderlas a quienes lo han seguido. Para algunas de las ideas más importantes expuestas en relación con sus creadores grupos, espacio de muchas dimensiones, Geometrías no euclidianas y lógica simbólica, por ejemplo, basta menos que un curso de Escuela superior para comprender los conceptos básicos. Todo lo que se necesita es interés y capacidad de concentrarse. La asimilación de algunas de estas ideas de la Matemática moderna es tan refrescante como beber agua fría en una cálida jornada e inspira como inspira cualquier arte.

Para facilitar la lectura se han repetido donde era necesario las definiciones más importantes, y de tiempo en tiempo se hacen referencias a los primeros capítulos.
No es necesario leer los capítulos consecutivamente. En efecto, quienes estén dotados de una estructura mental especulativa o filosófica pueden preferir leer finalmente el primer capítulo.
Con algunos ligeros desplazamientos para satisfacer las condiciones sociales, los capítulos seguirán el orden cronológico.
Sería imposible describir toda la obra de incluso los menos prolíficos de los hombres que vamos a estudiar, aunque sería provechoso intentar hacerlo en un libro para el lector común. De todos modos, gran parte de la obra de los más grandes matemáticos del pasado ahora tiene únicamente interés histórico y queda englobada en los puntos de vista más generales. En consecuencia, sólo se describirán los hechos más notables de cada uno de los matemáticos, haciendo una selección según su originalidad e importancia en el pensamiento moderno.
De los temas seleccionados para la descripción podemos mencionar, entre otros, los siguientes por tener interés para el lector general:

- la doctrina moderna del infinito (capítulos 2, 29);
- el origen de la probabilidad matemática (capítulo 5);
- el concepto e importancia de un grupo (capítulo 15);
- la significación de la invariancia (capítulo 21);
- las Geometrías no euclidianas (capítulo 16 y parte del 14);
- el origen de la Matemática de la relatividad general (última parte del capítulo 26);
- las propiedades de los números enteros comunes (capítulo 4) y su moderna generalización (capítulo 25);
- la significación y utilidad de los llamados números imaginarios, como $\sqrt{-1}$ (capítulos 14, 19);
- el razonamiento simbólico (capítulo 23).

Pero cualquiera que desee tener una rápida visión de la capacidad del método matemático especialmente aplicado a la ciencia debe dirigirse al Cálculo (capítulos 2, 6).
Los matemáticos modernos comenzaron con dos grandes progresos, la Geometría analítica y el Cálculo. La primera tomó una forma definida en 1637 y el último hacia el año 1666, aunque no llega a ser de propiedad pública hasta una década más tarde. Aunque la idea que hay tras él es infantilmente simple, el método de la Geometría analítica, tiene tanta importancia que cualquier muchacho de 17 años puede utilizarlo para obtener resultados que escaparían a los más grandes geómetras griegos, Euclides, Arquímedes y Apolonio. El hombre, Descartes, que finalmente hizo cristalizar este gran método tiene una vida particularmente interesante.
Al decir que Descartes fue quien creó la Geometría analítica no queremos decir que el nuevo método saliera tan sólo de su cabeza armado de todas las armas. Muchos antes que él hicieron progresos significativos hacia el nuevo método, pero Descartes fue quien dio el paso final e hizo del método un motor en función para la prueba, descubrimientos e invenciones geométricos. Pero Descartes debe compartir este honor con Fermat.
Análogas observaciones pueden hacerse a la mayor parte de los otros progresos realizados por la Matemática moderna. Un nuevo concepto puede estar "en el aire" durante generaciones hasta que algún hombre algunas veces dos o tres al mismo tiempo, ve claramente el detalle esencial que no habían apreciado sus predecesores y el nuevo invento llega a ser una realidad. Dícese, por ejemplo, que la relatividad ha sido la gran invención reservada por el tiempo para el genio de

Minkoswski. Sin embargo, la realidad es que Minkoswski no creó la teoría de la relatividad y que Einstein lo hizo. Carece de sentido decir que tal o cual cosa pudo haber sido hecha si las circunstancias no hubieran sido las que fueron. Cualquiera de nosotros podría sin duda saltar hasta la Luna si nosotros y el universo físico fuéramos diferentes de lo que somos, y la verdad es que no podemos dar ese salto.

En otros ejemplos, sin embargo, el mérito de algún gran progreso no es siempre justamente atribuido y el hombre que utilizó por primera vez el nuevo método de un modo más fructífero que su inventor obtiene algunas veces un galardón mayor del que merece. Tal parece ser el caso, por ejemplo, en una cuestión tan importante como es el Cálculo. Arquímedes tuvo el concepto fundamental de las sumas límites de las cuales surge el Cálculo integral y no sólo tuvo ese concepto sino que también demostró que podía aplicarse. Arquímedes también utilizó el método del Cálculo diferencial en uno de sus problemas. Cuando nos acercamos a Newton y Leibniz, en el siglo XVII, la historia del Cálculo se desenvuelve extraordinariamente. El nuevo método estaba ya más que "en el aire" antes de que Newton y Leibniz le hicieran descender a la tierra; Fermat, en realidad, ya lo hizo. También inventó el método de la geometría cartesiana independientemente de Descartes. A pesar de estos hechos indudables seguiremos la tradición y atribuiremos a cada gran matemático lo que la mayoría dice que a él se debe, arriesgando darle algo más de lo que es justo. La prioridad, al fin y al cabo, pierde gradualmente su importancia a medida que nos alejamos en el tiempo de los hombres causantes de las batallas verbales mientras ellos y sus partidarios vivieron.

Quienes jamás conocieron a un matemático profesional podrán quedar sorprendidos al tropezar con alguno, pues los matemáticos, como clase, son probablemente menos familiares para el lector en general que cualquier otro grupo de intelectuales. En la ficción el matemático aparece con un carácter mucho más raro que su primo el hombre de ciencia, y cuando se le encuentra en las páginas de la novela o en la pantalla sólo se ve en él un soñador andrajoso totalmente desprovisto de sentido común, cómica representación. ¿Qué tipo de mortal es el matemático en la vida real? Tan sólo investigando detalladamente qué clase de hombres fueron algunos de los grandes matemáticos y cómo vivieron, podemos reconocer la ridícula falsedad del retrato tradicional de un matemático.

Por muy extraño que parezca, no todos los grandes matemáticos han sido profesores en colegios o universidades. Algunos fueron militares de profesión; otros llegaron a la Matemática desde la Teología, el Derecho y la Medicina, y uno de los más grandes fue un astuto diplomático que llegó a mentir para el bien de su país. Algunos no han tenido profesión conocida. Todavía más extraño es que no todos los profesores de Matemática hayan sido matemáticos. Esto no debe sorprendernos cuando pensamos en la sima que existe entre el profesor de poesía que recibe un buen sueldo y el poeta que muere de hambre en un desván.

Las vidas que vamos a, estudiar demuestran, al menos, que un matemático es un ser humano como cualquier otro y algunas veces más afectivo. En el trato social ordinario la mayoría de ellos ha sido normal. Como es natural, se encuentran excéntricos entre los matemáticos, pero la proporción no es más elevada que en el comercio o entre las diversas profesiones. Como grupo, los grandes matemáticos son hombres de inteligencia integral, vigorosos, vigilantes, vivamente interesados por muchos problemas ajenos a la Matemática, y en sus luchas, hombres como cualquier otro. De ordinario los matemáticos tienen la particularidad de ser capaces de devolver lo que han recibido con interés compuesto. Por lo demás son individuos de extraordinaria inteligencia, que se diferencian de los restantes hombres de talento en su irresistible impulso hacia la Matemática. En ocasiones los matemáticos han sido (y algunos son aún en Francia) administradores extraordinariamente capaces.

Desde el punto de vista político los matemáticos presentan todo el espectro, desde el conservadurismo reaccionario hasta el liberalismo radical. Probablemente puede decirse que como clase han tendido ligeramente hacia la izquierda en sus opiniones políticas. En sus creencias religiosas se encuentran todos los matices, desde la más estrecha ortodoxia, que algunas veces, es el más negro fanatismo, hasta el completo escepticismo. Algunos eran dogmáticos y positivos en sus afirmaciones referentes a cosas de que nada sabían, pero de ordinario han sido el eco de las palabras del gran Lagrange: "yo no sé".

Otra característica merece ser mencionada en este lugar, pues diversos escritores y artistas (algunos desde Hollywood) se han interesado por la vida sexual de los grandes matemáticos. Particularmente, estos curiosos desean saber si algunos de los grandes matemáticos han sido pervertidos, una cuestión algo delicada, pero legítima en estos tiempos de preocupación por tales temas. La respuesta es negativa. Algunos fueron célibes, de ordinario debido a incapacidad económica, pero la mayoría fueron esposos felices que trajeron al mundo sus hijos en una forma inteligente y civilizada. De pasada haremos notar que los niños tenían una inteligencia superior al tipo medio. Algunos de los grandes matemáticos de los siglos pasados mantenían amantes cuando era la costumbre y moda de sus épocas. El único matemático cuya vida puede ofrecer cierto interés a los freudianos es Pascal.

Volviendo por un momento a la idea que se tiene de los matemáticos, recordaremos que los vestidos andrajosos no han constituido la invariable preferencia de los grandes matemáticos. Siguiendo la larga historia de la Matemática, y siempre que se tienen conocimientos detallados, se observa que los matemáticos han prestado la misma atención a su cuidado personal que cualquier otro grupo igualmente numeroso de hombres. Algunos han sido petimetres, otros desaliñados; la mayoría decentemente vestidos. Si en la actualidad algún grave caballero con trajes espectaculares, largo cabello, sombrero negro y cualquier otro signo de exhibicionismo nos asegura que es un matemático, podemos apostar que se trata de un psicópata transformado en numerólogo.

Las peculiaridades psicológicas de los grandes matemáticos son otro tema que ha despertado considerable interés. Poincaré nos narrará en un capítulo posterior algunas cosas acerca de la sicología de la creación matemática. En su conjunto los grandes matemáticos han tenido una vida más rica y más viril que la mayor parte de los mortales ordinarios. Su riqueza no se refiere exclusivamente a la aventura intelectual. Algunos de los grandes matemáticos han participado de peligros y conmociones y algunos de ellos han sido implacables enemigos, o como se dice ahora, expertos polemistas. Muchos han gustado de las satisfacciones de la batalla en su juventud, cosa sin duda censurable pero también humana, lo que indica que no han tenido sangre de pato; han podido hacer suyas las palabras: "Maldecir fortifica, bendecir relaja", que el devoto Christian William Blake escribe en sus Proverbios del infierno.

Esto nos lleva a lo que a primera vista (teniendo en cuenta la conducta de varios de los hombres aquí estudiados) parece ser un rasgo significativo de los matemáticos el de ser pendencieros. Sin embargo, estudiando las vidas de algunos de esos hombres se tiene la impresión de que un gran matemático no parece preocuparse de que otros le roben su obra, le desprecien o no le consideren suficientemente, e inicie una lucha para recobrar sus imaginarios derechos. Los hombres que se hallan por encima de estas luchas no parece que estén expuestos a lidiar batallas sobre la prioridad, y a acusar a sus competidores de plagiarios. No estaríamos en lo cierto si negásemos la superstición de que la persecución de la verdad hace necesariamente, veraces a los hombres, y en realidad no encontramos pruebas indudables de que la Matemática haga a los hombres malhumorados y pendencieros.

Otro detalle "psicológico" de tipo análogo es causa de mayores trastornos. La envidia es llevada al más alto nivel. El estrecho nacionalismo y los celos internacionales, aun en la Matemática pura impersonal, han modificado la historia de los descubrimientos y las invenciones hasta un grado tal que es casi imposible, en algunos casos importantes, estimar, de modo justo, la significación de la obra de un determinado individuo en el pensamiento moderno. El fanatismo racial, especialmente en los últimos tiempos, ha complicado también la tarea de quien intente hacer una exposición sin prejuicios de la vida y obra de los hombres de ciencia que no pertenezcan a su propia raza o nación.

Una exposición imparcial de la Matemática occidental, incluyendo la importancia que cada hombre y cada nación han tenido en el intrincado desarrollo de esta ciencia, sólo podría hacerla un historiador chino. Tan sólo él tendría la paciencia y serenidad necesarias para desentrañar la estructura curiosamente alterada y descubrir dónde se halla la verdad en nuestra polimorfa jactancia occidental.

Aunque limitáramos nuestra atención a la fase moderna de la Matemática nos enfrentaríamos con un problema de selección que debe ser resuelto de algún modo. Antes de llegar a esta solución tiene interés determinar la cuantía de la labor necesaria para escribir una historia, detallada de la Matemática, en una escala similar a la de una historia política para cualquier acontecimiento importante, por ejemplo la Revolución Francesa o la Guerra Civil Americana.

Cuando comenzamos a desenredar un hilo particular en la historia, de la Matemática, pronto tenemos la desalentadora sensación de que la Matemática es comparable a una vasta necrópolis a la que constantemente se van haciendo adiciones para la conservación eterna de los nuevos muertos. Los recién llegados, igual que algunos pocos que allí arribaron para el perpetuo recuerdo hace 5.000 años, deben estar de tal modo exhibidos que parezcan conservar el completo vigor de las horas en que ellos vivieron; en efecto, debe crearse la ilusión de que no han cesado de vivir. Y la ilusión debe ser tan natural que hasta los arqueólogos más escépticos que visiten los mausoleos tengan que exclamar, como los matemáticos que hoy viven, que las verdades matemáticas son inmortales, imperecederas; lo mismo ayer que hoy y que mañana. La esencia de esas verdades eternas tiene que ser adaptable, pero puede vislumbrarse el destello de invariabilidad detrás de todos los ciclos repetidos del nacimiento, de la muerte y de la declinación de nuestra raza.

Mas el simple espectador de la historia de la Matemática queda pronto agobiado por el asombroso cúmulo de invenciones matemáticas que aun mantienen su vitalidad e importancia para la obra moderna, en un grado superior que en cualquier otro campo del trabajo científico, después de centurias y decenas de centurias.

Un lapso de menos de 100 años abarca todos los acontecimientos de significación en la Revolución Francesa o en la Guerra Civil Americana, y menos de 500 hombres superiores han desempeñado un papel suficientemente memorable que exija el recuerdo. Pero el ejército de quienes han hecho alguna contribución a la Matemática, constituye una muchedumbre a medida que nos remontamos en la historia; 6.000 u 8.000 hombres nos piden algunas palabras que les salve de ser olvidados, y una vez que los más audaces han sido reconocidos sería un problema de selección arbitraria e ilógica juzgar, entre aquella multitud clamorosa, quiénes deben sobrevivir y quiénes han de ser condenados al olvido.

Este problema apenas se presenta cuando se describe el desarrollo de las ciencias físicas. También hay que remontarse a la antigüedad, pero para la mayor parte de ellas bastan 350 años para abarcar todos los hechos de importancia para el pensamiento humano. Pero quien intente hacer justicia humana a la Matemática y a los matemáticos tendrá que tener en cuenta 6.000 años, plazo en el que han actuado tales talentos, y enfrentarse con una multitud de 6.000 a 8.000 reclamantes que esperan les sea hecha justicia.

El problema se hace aún más difícil cuando nos aproximamos a nuestros tiempos. Esto no se debe a la más íntima proximidad con los hombres que nos han precedido en los dos últimos siglos, sino al hecho universalmente reconocido entre los matemáticos profesionales que el siglo XIX, prolongándose en el XX, fue y es la edad más grande de la Matemática que el mundo ha conocido. Comparado con lo que hizo la gloriosa Grecia en Matemática, el siglo XIX es una hoguera al lado de una modesta bujía.

¿Qué hilos seguiremos para guiarnos a través de este laberinto de invenciones matemáticas? Ya ha sido indicado cuál es el camino principal: el que conduce desde el pasado semiolvidado a algunos de los conceptos dominantes que ahora gobiernan imperios ilimitados de la Matemática, pero que pueden a su vez ser destronados mañana para dejar espacio a generalizaciones aún más vastas. Siguiendo este camino principal concederemos lugar secundario a los perfeccionadores en favor de los inventores.

Tanto los inventores como los perfeccionadores son necesarios para el progreso de cualquier ciencia. Toda exploración debe tener, además de sus primeros exploradores, sus continuadores para que informen al mundo de lo que ha sido descubierto. Pero para la mayoría de los seres humanos el explorador que muestra por primera vez la nueva senda es la personalidad más atractiva, aunque haya tropezado a la mitad del camino. Estudiaremos, pues, los inventores con preferencia a los perfeccionadores. Por fortuna para la justicia histórica muchos de los grandes inventores en la Matemática han sido también perfeccionadores sin par.

Hasta con esta restricción la senda desde el pasado hasta el presente no siempre será clara para quienes no la han seguido. Podemos resumir aquí brevemente lo que ha sido la clave principal que nos conduce a través de toda la historia de la Matemática.

Desde los primeros tiempos dos opuestas tendencias, que algunas veces se han ayudado una a otra, han gobernado el desarrollo de la Matemática. Tales tendencias son las hacia lo discontinuo y hacia lo continuo.

El concepto de discontinuo describe toda la naturaleza y toda la Matemática atomísticamente en función de elementos de individuos reconocibles como elementos individuales diferentes, como los ladrillos en una pared, o los números, 1, 2, 3,...; El concepto de continuo busca comprender los fenómenos naturales, el curso de un planeta en su órbita, el paso de una corriente de electricidad, el ascenso y descenso de las mareas y una multitud de fenómenos que nos hacen creer que conocemos la naturaleza, en la forma mística de Heráclito: "Todas las cosas fluyen". En la actualidad (como veremos en el último capítulo), "fluir" o su equivalente ser continuo es una cosa tan incierta que casi está desprovista de significación. Sin embargo, dejémoslo por el momento.

Intuitivamente nosotros sentimos que conocemos lo que quiere decir movimiento continuo", el de un pájaro o una bala a través del aire o la caída de una gota de lluvia. El movimiento es uniforme y no procede por saltos, es ininterrumpido. En el movimiento continuo, o más generalmente en el concepto de continuidad misma, los números individualizados 1, 2, 3,... no son la imagen matemática apropiada. Todos los puntos de un segmento de una línea recta, por ejemplo, no tienen individualidades separadas como la tienen los números de la sucesión 1, 2, 3,..., donde el paso de un término de la sucesión al siguiente es el mismo (especialmente 1; 1 + 2 = 3; 1 + 3 = 4, y así sucesivamente). Pero entre dos puntos de la línea, sin importar que los puntos puedan estar muy juntos, podemos siempre encontrar o al menos imaginar otro punto: no existe el paso "más corto" desde un punto al "siguiente". En efecto, no existe en modo alguno punto siguiente.

La última: la concepción de continuidad, cuando se desarrolla en la forma de Newton, Leibniz y sus sucesores, conduce al ilimitado dominio del Cálculo infinitesimal y sus innumerables aplicaciones a la ciencia y a la tecnología y a todo lo que actualmente se llama Análisis matemático. La otra, la concepción discontinua basada sobre 1, 2, 3,... es el dominio del Álgebra, la teoría de números y la Lógica simbólica. La Geometría participa de ambos conceptos, el continuo y el discontinuo.

En la actualidad es una tarea esencial de la Matemática armonizar esos dos conceptos englobándolos en una Matemática comprensiva, eliminando la oscuridad que existe tanto en uno como en otro.

Es una injusticia de nuestros predecesores hacer resaltar el pensamiento matemático moderno haciendo tan sólo ligeras referencias a los precursores que dieron el primero y, posiblemente, el paso más difícil. Pero casi todas las cosas útiles debidas a la Matemática anterior al siglo XVII han tenido uno de estos dos destinos: se han simplificado grandemente, de modo que ahora constituyen una parte de cualquier curso escolar regular, o han sido absorbidas como un detalle en la obra de mayor generalización.

Las cosas que ahora parecen tan simples como el sentido común, nuestra forma de escribir los números con su "sistema de posición" de los valores y la introducción de un símbolo para el cero que dio el toque final a dicho sistema, costó increíble trabajo inventarlas. Incluso las cosas más sencillas que contienen la verdadera esencia del pensamiento matemático, la abstracción y la generalización, deben haber costado siglos de lucha hasta que fueron descubiertas, y sus inventores se han desvanecido sin dejar un indicio de sus vidas y personalidades. Como Bertrand Russell observa, "debe de haber pasado largo tiempo hasta descubrir que una pareja de faisanes y un par de días son ejemplos del número dos". En efecto, han pasado 25 siglos de civilización hasta desarrollar la definición lógica de Russell referente al "dos" o a cualquier otro número cardinal (véase el último capítulo). Por otra parte, la concepción de un punto, que nosotros creemos (erróneamente) comprenderla totalmente cuando comenzamos la Geometría escolar, debe haber aparecido muy tardíamente en el desarrollo del hombre. Horace Lamb, un físico matemático inglés, quería "erigir" un monumento al inventor matemático desconocido del punto matemático como el tipo supremo de esa abstracción que ha sido una condición necesaria del trabajo científico desde el comienzo.

¿Quién, de qué modo fue inventado el punto matemático? En un sentido, el hombre olvidado de Lamb; en otro, Euclides con su definición: "un punto es aquello que no tiene partes y que no tiene magnitud"; en un tercer sentido, Descartes con su invención de las "coordenadas de un punto"; hasta que finalmente en Geometría, como el técnico la practica hoy, el "punto" misterioso une al hombre desconocido y a todos sus dioses en un eterno olvido, siendo reemplazado por algo más útil: una sucesión de números escritos en un cierto orden.

Esto último es un ejemplo moderno de la abstracción y precisión hacia las cuales la Matemática tiende constantemente, y tan sólo cuando se alcanza la abstracción y la precisión nos damos cuenta de que para una clara comprensión se necesita un mayor grado de abstracción y una precisión mayor. Nuestra concepción de "punto" no hay duda que evolucionará hacia algo más abstracto. En efecto, los "números", en función de los cuales se describen hoy los puntos, se han disuelto a comienzos de este siglo en la vaga luz de la lógica pura, que a su vez se desvanecerá en algo más difuso y hasta menos sustancial.

No es una verdad necesaria la de que seguir paso a paso a nuestros predecesores sea la forma más segura de comprender tanto su concepción de la Matemática como la nuestra. Esta vuelta por el camino que nos ha conducido a nuestro concepto actual tiene, sin duda, gran interés por sí misma. Pero es más rápido lanzar una ojeada hacia atrás desde la cima en la cual estamos ahora. Los pasos falsos, las sendas complicadas y los caminos que a nada han conducido se difuminan a la distancia; únicamente vemos las amplias rutas que conducen directamente hacia el pasado, donde las perdemos en las nieblas de la inseguridad y de la conjetura. Ni el espacio, ni el número, ni siquiera el tiempo, tienen la misma significación para nosotros que la que tuvieron para los hombres cuyas grandes figuras aparecen confusamente a través de la niebla. Un pitagórico del siglo VI antes de Cristo puede entonar: "Bendícenos, divino Número, tú que engendraste dioses, y hombres"; un kantiano del siglo XIX podría referirse confiadamente al "espacio" como una forma de "intuición pura"; un astrónomo matemático podría anunciar hace unas décadas que el Gran Arquitecto del Universo es un matemático puro. Lo más notable de todas estas profundas expresiones es que seres humanos no más insensatos que nosotros pensaron una vez, que tenían sentido.

Para un matemático moderno estas generalidades que todo lo abarcan significan menos que nada. De todos modos, dada su pretensión de ser la engendradora universal de dioses y hombres, la Matemática ha obtenido algo más sustancial, una fe en sí misma y en su capacidad para crear valores humanos.

Nuestro punto de vista ha cambiado y aún está cambiando. A las palabras de Descartes: "dadme espacio y movimiento y yo os daré un mundo", Einstein podría contestar que esa demanda carece de significación: "Sin un "mundo", materia, no hay "espacio" ni "movimiento". Y para moderar el turbulento misticismo de Leibniz en el siglo XVII acerca de la misteriosa $\sqrt{-1}$, podría responderse: "el espíritu divino encuentra una sublime salida en que la maravilla del Análisis, el portentoso ideal, se halla entre el ser y el no ser, que nosotros llamamos la raíz cuadrada imaginaria de la unidad negativa". Hamilton en el año 1840 construye una pareja de números que cualquier niño inteligente puede comprender y manipular, y que para la Matemática y la ciencia sirve para lo que sirvió el mal denominado "imaginario". El místico "no ser" del siglo XVII de Leibniz se ve que tiene un "ser" tan sencillo como ABC.

¿Significa esto una pérdida? Debe un matemático moderno perder algo de valor cuando, a través del método de los postulados, intenta seguir la pista de ese ilusorio "sentimiento" descrito por Heinrich Hertz, el descubridor de las ondas que llevan su nombre ¿Podemos escapar del sentimiento de que esas fórmulas matemáticas tienen una existencia independiente y una inteligencia por sí mismas más sabias que nosotros, más sabias aún que sus descubridores, y que nosotros obtenemos de ellas más de lo que originariamente se expuso en ellas? Cualquier matemático competente comprenderá el sentimiento de Hertz, pero también se inclinará a la creencia de que mientras se descubren continentes y ondas hertzianas, se inventan dínamos y matemáticas, que hacen lo que nosotros queremos que hagan. Podemos aún soñar, pero no necesitamos deliberadamente provocar las pesadillas. Si es cierto, como Charles Darwin afirmó, que "la Matemática parece dotar al individuo de algo semejante a un nuevo sentido", ese sentido es el sentido común sublimado que el físico e ingeniero Lord Kelvin declaró que era la Matemática.

¿No está más cercano a nuestros hábitos de pensar aceptar temporalmente, con Galileo, que "el gran libro de la naturaleza está escrito en símbolos matemáticos" y que como afirma Platón: "Hasta Dios geometriza", o como dice Jacobi: "Hasta Dios aritmetiza"? Si inspeccionamos los símbolos en el gran libro de la naturaleza con los ejes críticos de la ciencia moderna pronto percibiremos que somos nosotros los que los hemos escrito y que hemos usado esa escritura particular porque la hemos inventado para facilitar nuestra comprensión. Algún día encontraremos una abreviatura más expresiva que la Matemática para relacionar nuestras experiencias del Universo físico, a no ser que aceptemos el credo de la mística científica de que todo es Matemática y que no se trata de una descripción, para nuestra conveniencia, en el lenguaje matemático. Si "el Número gobierna el Universo" como Pitágoras afirmó, el Número es simplemente nuestro delegado en el trono, pues nosotros gobernamos el Número.

Cuando un matemático moderno abandona por un momento sus símbolos para comunicar a otros el sentimiento que la Matemática e inspira, no es un eco de Pitágoras y Jeans, pero puede citar las palabras que Bertrand Russell dijo hace un cuarto de siglo aproximadamente: "la Matemática estrictamente considerada posee no sólo verdad sino también suprema belleza, una belleza fría y sobria como la escultura, que no recurre a alguna parte de nuestra naturaleza más débil, sin la magnificencia engañosa de la pintura o de la música, sino sublimemente pura y capaz de una perfección austera, como sólo el más grande arte puede hacer".

Otros, familiarizados con lo que ha sucedido a nuestra concepción de la "verdad matemática" desde los aires en que Russell alababa la belleza de la Matemática, pueden referirse a la "resistencia del hierro" que algunos adquieren en sus intentos por comprender lo que la Matemática significa y pueden citar las líneas de James Thomson (conque finaliza este libro) en la descripción de la Melancolía de Durero (el frontispicio). Y si se reprocha a algunos devotos haber gastado su vida en lo que a muchos puede parecer la egoísta persecución de una belleza que no se refleja de modo inmediato en la vida del prójimo, aquéllos pueden repetir las palabras de Poincaré: "La Matemática por la Matemática. Las gentes han quedado sorprendidas por esta fórmula, que, sin embargo, es tan buena como la de la vida por la vida, aunque la vida sea una desventura".

Para calcular lo que se debe a la moderna Matemática en comparación con la antigua debemos en primer término contemplar la obra total en el período posterior a 1800 comparada con la llevada a cabo antes de 1800. La historia más extensa de la Matemática es la de Moritz Cantor, *Geschichte der Mathematik*. En tres grandes volúmenes (un cuarto debido a colaboradores complementan los tres primeros). Los cuatro volúmenes tienen en total 3.600 páginas. Cantor tan sólo expone el esquema del desarrollo no intentando entrar en detalles referentes a las contribuciones descritas, ni explica los términos técnicos para que un lego pueda comprender lo que significa toda la historia, y las biografías son lo más sucintas posible; su historia va dirigida a quien tiene ya alguna instrucción técnica. Esta historia termina con el año 1799, justamente cuando los modernos matemáticos comenzaron a sentir su libertad. ¿Qué sería si se intentara hacer en una escala similar el esquema de la historia de la Matemática en el siglo XIX? Se ha calculado que se necesitarían 19 ó 20 volúmenes del tamaño de los de la historia de Cantor, con un total de 17.000 páginas. El siglo XIX, en esta escala, ha contribuido al conocimiento matemático en cinco veces lo debido a todos los años precedentes.

El período, sin comienzo, anterior a 1800 se descompone bruscamente en dos. Esta ramificación tiene lugar el año 1700, y es debida principalmente a Isaac Newton (1642-1727). El rival más grande de Newton en Matemática fue Leibniz (1646-1716). Según Leibniz, de toda la Matemática hasta el tiempo de Newton inclusive, la mitad más importante es debida a éste. Este cálculo se refiere a la importancia de los métodos generales de Newton más que a la totalidad de su obra; los *Principia* son considerados como la contribución más importante al pensamiento científico que ha podido hacer un hombre.

Retrogradando en el tiempo más allá del año 1700 no encontramos alto de nada comparable hasta alcanzar la edad de oro de Grecia: un salto de casi 2000 años. Remontándonos más allá del año 600 a. de J. C. tenernos que pasar por la sombra antes de que nuevamente se haga la luz por un momento en el antiguo Egipto. Finalmente, llegamos a la primera gran edad de la Matemática alrededor del año 2000 a. de J. C. en el valle del Eúfrates. Los descendientes de los sumerios, en Babilonia, parecen haber sido los primeros "modernos" en Matemática. Ciertamente, su forma de plantear ecuaciones algebraicas está más en el espíritu del Álgebra que conocemos que cualquier otra cosa hecha por griegos en su Edad de Oro. Más importante que el Álgebra técnica: de estos antiguos babilonios es su reconocimiento, como lo muestra su obra, de la necesidad de la prueba en Matemática. Hasta hace poco se suponía que fueron los griegos los primeros en reconocer la necesidad de la prueba en una proposición matemática. Éste es uno de los pasos más importantes dado por los seres humanos. Desgraciadamente ha transcurrido tan largo tiempo que somos llevados tan lejos como lejos remonta nuestra civilización.

La Matemática ha tenido cuatro grandes edades: la babilónica, la griega, la newtoniana (para dar un nombre al período alrededor del año 1700) y la reciente que comienza hacia el año 1800 y continúa hasta los días actuales. Jueces competentes han llamado a esta última la Edad de Oro de la Matemática.

En la actualidad la invención (descubrimiento, si el lector prefiere) matemática marcha hacia adelante más vigorosamente que nunca. Lo único que al parecer podría detener su progreso es un colapso general de lo que llamamos civilización. Si se produce, la Matemática quedará olvidada durante siglos, como ocurrió después de la declinación de Babilonia; pero si la historia se repite, como se dice, podemos creer que brotará nuevamente más fresca y más clara que nunca, después de que, nosotros y nuestra insensatez hayan pasado al olvido.

Capítulo Segundo
Mentes Modernas en Cuerpos Antiguos

ZENON, EUDOXIO, ARQUIMEDES

La gloria que fue Grecia y el fausto que fue Roma.
E. A. Poe

.

Para apreciar nuestra propia Edad de Oro de la Matemática debemos tener en cuenta algunas de las grandes y sencillas directrices de aquellos cuyo genio preparó hace largo tiempo el camino para nosotros, -y debemos lanzar una ojeada a las vidas y obras de tres griegos: Zenón (495-435 a. de J. C.), Eudoxio (408-355 a. de J. C.) y Arquímedes (287-212 a. de J. C.) Euclides será mencionado más tarde, donde encuadra mejor su obra.

Zenón y Eudoxio son representantes de dos vigorosas y opuestas escuelas de pensamiento matemático que florecen en la actualidad, la crítica destructiva y la crítica constructiva. La mente de ambos poseía un espíritu crítico tan penetrante como la de sus sucesores de los siglos XIX y XX. Este juicio puede, como es natural, invertirse: Kronecker (1823-1891) y Brouwer (1881-), los críticos modernos del Análisis matemático, las teorías del infinito y del continuo, son tan antiguas como Zenón; los creadores de las teorías modernas de la continuidad y el infinito, Weierstrass (1815-1897), Dedekind (1831-1916) y Cantor (1845-1918) son contemporáneos intelectuales de Eudoxio.

Arquímedes, la inteligencia más grande de la antigüedad, es moderno hasta el tuétano. Él y Newton podían haberse comprendido perfectamente, y es muy posible que Arquímedes, si hubiera podido vivir hasta seguir un curso de postgraduado en Matemática y física, hubiera comprendido a Einstein, Bohr, Heisenberg y Dirac mejor que éstos se han comprendido entre sí. De todos los antiguos, Arquímedes es el único cuyo pensamiento gozó de la libertad que los matemáticos más grandes se permiten actualmente después de que 25 siglos han alisado su camino. Arquímedes es el único entre los griegos que tuvo suficiente altura y vigor para ver claro a través de los obstáculos colocados en la, senda del progreso matemático por los aterrorizados geómetras que habían escuchado a los filósofos.

Cualquier enumeración de los tres matemáticos más grandes de la historia, incluiría el nombre de Arquímedes. Los otros dos que de ordinario se asocian a él son Newton (1642-1727) y Gauss (1777-1855) Quienes consideran la relativa pobreza de la ciencia matemática y física en las respectivas edades en que estos gigantes vivieron y comparen sus conquistas con el carácter de sus tiempos colocarían a Arquímedes en él primer lugar. Si los matemáticos y hombres de ciencia griegos hubieran seguido a Arquímedes en vez de a Euclides, Platón y Aristóteles, seguramente habrían anticipado en dos millares de años la edad de la Matemática moderna, que comenzó con Descartes (1596-1650) y Newton en el siglo XVII, y la edad de la ciencia física moderna, inaugurada por Galileo (1564-1642) en el mismo siglo.

Tras estos tres precursores de la época moderna se alza la figura semimística de Pitágoras (569?-500? a. de J. C.), matemático místico, investigador de la naturaleza, "una décima de genio y nueve décimas de aguda mentira". Su vida tiene algo de fábula, rica con el increíble aumento de sus prodigios, siendo el hecho más importante para el desarrollo de la Matemática el haberla distinguido del extraño misticismo de los números con que revistió sus especulaciones cósmicas. Viajó por Egipto, aprendió mucho de sus sacerdotes, visitó Babilonia y repitió sus experiencias de Egipto; fundó una secreta hermandad para el alto pensamiento matemático y las especulaciones físicas, mentales, morales y éticas, en Cretona, en el sur de Italia, y además realizó dos de las más grandes contribuciones a la Matemática. Según la leyenda, murió en las llamas de su propia escuela quemada por los fanáticos políticos y religiosos que azuzaron a las masas para protestar contra la instrucción que Pitágoras pensaba darles. *Sic transit gloria mundi.*
Antes de Pitágoras, nadie, se había dado clara cuenta de que la prueba debe proceder de las suposiciones. De acuerdo con la tradición, Pitágoras fue el primer europeo que insistió en que los axiomas, los postulados, deben establecerse al principio, en el desarrollo de la Geometría, y que todo el desarrollo descansa en las aplicaciones del razonamiento deductivo partiendo de los axiomas. Siguiendo la práctica corriente emplearemos la palabra "postulado" en lugar de "axioma", pues el axioma tiene una perniciosa asociación histórica de "verdad evidente por sí misma", que no tiene el postulado. El postulado es una arbitraria suposición establecida por el matemático mismo y no por Dios Todopoderoso.
Pitágoras estableció, pues, la prueba en la Matemática. Ésta es una conquista. Antes de él, la Geometría había sido una colección de reglas a las que se había llegado empíricamente, sin una clara indicación de que estuvieran relacionadas entre sí y sin la más leve sospecha que pudieran deducirse de un número relativamente pequeño de postulados. La prueba constituye hoy el verdadero espíritu de la Matemática y nos parece difícil imaginar cómo pudo prescindir de ella el razonamiento matemático.
La segunda contribución matemática sobresaliente de Pitágoras es el descubrimiento, que le humilló y desoló, de que los números naturales comunes 1,2,3,...1 son insuficientes para la construcción de la Matemática, hasta en la forma rudimentaria en que él la conocía. Ante este capital descubrimiento predicó, como un profeta, que toda la naturaleza, el Universo entero, físico-metafísico, mental, moral, matemático, todas las cosas están construidas según la norma discontinua de los números naturales 1, 2, 3,...[1] y sólo es interpretable en función de estos ladrillos proporcionados por Dios. Dios, declaraba Pitágoras, es en efecto " número", y por número quería referirse al número natural común. Sin duda se trata de una sublime concesión, bella y simple, pero tan inabordable como su eco en Platón - "Hasta Dios geometriza", o en Jacobi: "Hasta Dios aritmetiza", o en Jeans: "El gran Arquitecto del Universo comienza ahora a aparecer como un matemático". Una obstinada discrepancia matemática demolió la filosofía, la, matemática y la metafísica de Pitágoras. Pero, a diferencia de algunos de sus sucesores, aceptó finalmente la derrota después de haber luchado en vano para anular el descubrimiento que había abolido su credo.
He aquí lo que había derrumbado su teoría: es imposible encontrar dos números enteros tales que el cuadrado de uno de ellos sea igual al doble del cuadrado del otro. Esto puede ser probado por un simple razonamiento[2] que está al alcance de cualquiera que haya estudiado unas pocas

[1] Estrictamente se llaman los números naturales. (Nota del traductor)
[2] Supongamos $a^2 = 2b^2$ donde, sin pérdida de generalidad, a, b, son números enteros sin ningún factor común mayor que 1 (tal factor puede ser suprimido en la ecuación aceptada) Si a es un número impar nos encontramos ante una

semanas de Álgebra, o hasta por cualquiera que comprenda la Aritmética elemental. En realidad Pitágoras encontró su tropiezo en Geometría: la razón entre el lado de un cuadrado y una de sus diagonales no puede ser expresada como razón de dos números enteros cualesquiera. Este juicio es equivalente al anterior referente a los cuadrados de los números enteros. En otra forma podemos decir que la raíz cuadrada de 2 es irracional, o sea, no es igual a un número entero o fracción decimal exacta o suma de los dos, obtenida dividiendo un número entero por otro; un concepto geométrico tan simple como el de la diagonal de un cuadrado desafía a los números naturales 1, 2, 3,... y niega la primitiva filosofía pitagórica. Podemos construir fácilmente la diagonal geométrica, pero no podemos medirla con un número finito de pasos. Esta imposibilidad da lugar claramente a los números irracionales y a los procesos infinitos que atraen la atención de los matemáticos. Así, la raíz cuadrada de 2 puede ser calculada con cualquier número finito dado de cifras decimales por el proceso enseñado en la escuela o por métodos más importantes, pero las cifras decimales jamás "se repiten periódicamente" (como por ejemplo ocurre para 1/7) En este descubrimiento Pitágoras encontró el fundamento del moderno Análisis matemático.
Los resultados obtenidos por este simple problema no fueron admitidos de un modo satisfactorio por todos los matemáticos. Nos referimos a los conceptos matemáticos del infinito (lo incontable), límites y continuidad, conceptos que están en la raíz del Análisis moderno. Tiempo tras tiempo las paradojas y sofismas que se deslizan en la Matemática con estos conceptos al parecer indispensables han sido considerados y finalmente eliminados, y sólo reaparecen una generación o dos más tarde, cambiados aunque siempre los mismos. Los encontramos más vivos que nunca en la Matemática de nuestro tiempo. Los razonamientos siguientes constituyen una descripción extraordinariamente simple e intuitiva de la situación.

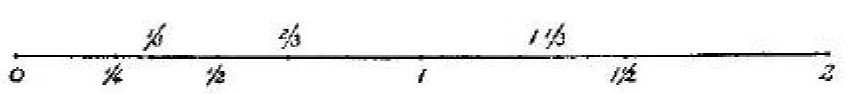


Figura 2.1

Consideremos una línea recta de diez centímetros de largo y supongamos que ha sido trazada por el "movimiento" "continuo" de un -"punto". Las palabras entre comillas son las que ocultan las dificultades. Sin analizarlas podemos fácilmente persuadirnos de que describimos lo que ellas significan. Ahora escribamos en el extremo izquierdo de la línea la cifra 0 y en el extremo derecho el número 2. A mitad del camino entre 0 y 2 escribiremos 1; a la mitad entre 0 y 1 escribiremos 1/2; a la mitad entre 0 y 1/2 escribiremos 1/4, y así sucesivamente. De modo análogo entre 1 y 2 escribiremos 1 1/2 y entre 1 1/2 y 2, 1 1/4, y así sucesivamente. Una vez hecho esto procederemos del mismo modo y escribiremos 1/3, 2/3, 1 1/3, 1 2/3, y entonces descompondremos cada uno de los segmentos resultantes en segmentos iguales más pequeños. Finalmente "en la imaginación" podemos concebir que este proceso se realiza para todas las fracciones comunes y números mixtos comunes que son mayores que 0 y menores que 2; los puntos de división conceptual nos dan todos los números racionales entre 0 y 2. Tratase de un número infinito de puntos. ¿Llegarán a "cubrir" completamente la línea? No. ¿A qué punto corresponde la raíz cuadrada de 2? A ningún punto, pues esta raíz cuadrada no se obtiene dividiendo un número cualquiera entero por otro. Pero la raíz cuadrada de 2 es sin duda un "número" de algún tipo[3]; su punto representativo se encuentra entre 1,41 y 1,42 y nosotros

---

contradicción inmediata, puesto que $2b^2$ es par; si a es par, ó sea $2c$, entonces $4c^2 = 2b^2$ ó $2c^2 = b^2$, de modo que b es par, y por tanto a y b tienen el factor común 2, lo, que es de nuevo una contradicción

[33] Trátase manifiestamente de una afirmación viciosa

podemos colocarlo tan aproximado como nos plazca. Para cubrir la línea completamente con puntos nos veremos forzados a imaginar o a inventar infinitamente más "números" que los racionales. Es decir, aceptamos que la línea es continua, y postulamos que cada punto de ella corresponde a un uno y solamente a un "número real". El mismo tipo de suposición puede ser llevado a todo un plano y aun más allá, pero esto basta por el momento.

Problemas tan sencillos como éstos pueden conducir a serias dificultades. Con respecto a estas dificultades, los griegos estaban divididos, como nosotros lo estamos, en dos grupos irreconciliables. Uno se detenía en su ruta matemática y rechazaba marchar hacia el Análisis: el Cálculo integral en el cual nosotros nos detendremos cuando lleguemos a él; el otro intentaba vencer las dificultades y conseguía convencerse a sí mismo de que así lo hacía. Aquellos que se detenían, aunque cometían pocos fracasos, eran comparativamente estériles para la verdad no menos que para el error; aquellos que necesitaban descubrir muchas cosas del más alto interés para la Matemática y el pensamiento racional en general, dejaban algunas veces abierta la critica destructiva, precisamente como ha sucedido en nuestra propia generación. Desde los primitivos tiempos nos encontramos con estos dos tipos mentales diferentes y antagónicos: los cautelosos que justifican quedarse atrás debido a que la tierra tiembla bajo sus pies, y los más audaces precursores que saltan el abismo para encontrar tesoros y seguridad relativa en el otro lado.

Estudiaremos primeramente algunos de aquellos que se negaban a saltar. Para hallar un pensamiento tan penetrante y sutil que lo iguale tenemos que llegar hasta el siglo XX y encontrar a Brouwer.

Zenón de Elea (495-135 a. de J. C.), amigo del filósofo Parménides, cuando visitó Atenas con su protector dejó sorprendidos a los filósofos inventando cuatro inocentes paradojas que no podían resolver con palabras. Se dice que Zenón fue un campesino autodidacto. Sin intentar resolver cuál fue su propósito al inventar sus paradojas se han mantenido opiniones diferentes nos limitaremos a mencionarlas. Teniéndolas presentes resulta evidente que Zenón, hubiera podido objetar nuestra división "infinitamente continuada" de la línea de diez centímetros, descrita antes. Así se deduce de las dos primeras de sus paradojas. La Dicotomía y el argumento Aquiles. Las dos últimas, sin embargo, muestran que hubiera podido objetar con la misma vehemencia la hipótesis opuesta, la de que la línea no es "divisible infinitamente" y que se compone dé una serie separada de puntos que pueden ser numerados 1, 2, 3,... Las cuatro en su conjunto constituyen un círculo de hierro más allá del cual el progreso parece imposible.

Primero, *la Dicotomía*. El movimiento es imposible, debido a que siempre que se mueve debe alcanzar la mitad de su curso antes de que alcance el final; pero antes de haber alcanzado la mitad debe haber alcanzado la cuarta parte y así sucesivamente de modo indefinido. De aquí que el movimiento nunca pueda iniciarse.

Segundo, el argumento *Aquiles*. Aquiles corriendo tras una tortuga que se halla delante de él jamás puede alcanzarla, pues primero debe llegar al lugar desde el cual la tortuga ha partido; cuando Aquiles llega a ese sitio la tortuga ya no está allí y siempre marcha adelante. Repitiendo el argumento podemos fácilmente ver que la tortuga siempre estará delante.

Ahora examinemos las opuestas.

Tercera, *la flecha*. Una flecha que se mueve en un instante dado está en reposo o no está en reposo, es decir, se mueve. Si el instante es indivisible, la flecha no puede moverse, pues si lo hace el instante quedaría dividido inmediatamente. Pero el tiempo está constituido de instantes. Como la flecha no puede moverse en ningún instante, no podrá en ningún momento. De aquí que siempre permanecerá en reposo.

Cuarta, el *Stadium*. "Para demostrar que la mitad del tiempo puede ser igual al doble del tiempo consideraremos tres filas de cuerpos una de las cuales, (*A*) está en reposo, mientras que las otras dos, (*B*) y (*C*), se mueven con igual velocidad en sentidos opuestos.

	Primera posición					Segunda posición					
(*A*)	0	0	0	0	(*A*)		0	0	0	0	
(*B*)	0	0	0	0	(*B*)	0	0	0	0		
(*C*)	0	0	0	0	(*C*)			0	0	0	0

En el momento en que todas están en la misma parte del curso (*B*), habrá sobrepasado doble números de cuerpos en (*C*) que en (*A*) Por lo tanto el tiempo que ha empleado para pasar (*A*) es doble que el tiempo que ha empleado para pasar (*C*) Pero el tiempo que (*B*) y (*C*) han empleado para alcanzar la posición (*A*) es el mismo. Por tanto el doble del tiempo es igual a la mitad del tiempo" (traducción de Burnet) Es útil imaginar (*A*) como una valla de estacas.

Estas son, en lenguaje no matemático, la serie de dificultades que encontraron los primeros que se ocuparon de la continuidad y el infinito. En los libros escritos hace 20 años se dice que "la teoría positiva del infinito" creada por Cantor, y la teoría de los números "irracionales", como la raíz cuadrada de 2, inventada por Eudoxio, Weierstrass y Dedekind, han disipado todas estas dificultades para siempre. Esa afirmación no podía ser aceptada por todas las escuelas del pensamiento matemático. Así, al detenernos en Zenón nos hemos, en efecto, discutido a nosotros mismos. Quienes deseen saber algo más respecto a esos problemas pueden consultar el Parménides de Platón. Necesitamos tan sólo hacer notar que Zenón finalmente perdió su cabeza por traición o algún acto semejante. Poco es lo que relativamente hicieron para el progreso de la Matemática los sucesores de Zenón, aunque al menos intentaron hacer temblar sus fundamentos.

Eudoxio (408-355 a. de J. C.), de Cnido, heredó el legado que hizo Zenón al inundo y no mucho más. Como muchos de los hombres que se han dedicado a la Matemática, Eudoxio sufrió de extrema pobreza en su juventud. Platón estaba en sus años mozos cuando vivía Eudoxio y Aristóteles tenía alrededor de los 30 años cuándo Eudoxio murió. Tanto Platón como Aristóteles, los filósofos principales de la antigüedad, estaban influidos por las dudas que Zenón había inyectado en el razonamiento matemático y que Eudoxio, en su teoría de las proporciones - "la corona de la Matemática griega"-, suavizó hasta la última cuarta parte del siglo XIX.

Siendo joven, Eudoxio se trasladó a Atenas desde Tarento, donde había estudiado con Archytas (428-347 a. de J. C.), un excelente matemático, administrador y soldado. Llegado a Atenas, Eudoxio pronto encontró a Platón. Como era demasiado pobre para vivir cerca de la academia, Eudoxio venía desde el Pireo, donde el pescado, el aceite de oliva y el alojamiento eran baratos. Aunque Platón no era un matemático en el sentido técnico, fue llamado "el hacedor de la Matemática" y no puede negarse que cuando estaba irritado hacía Matemáticas infinitamente mejores que cuando quería crear verdaderas Matemáticas. Como veremos, su notable influencia para el desarrollo de la Matemática fue probablemente perniciosa. Pero rápidamente reconoció lo que era Eudoxio y fue su amigo devoto hasta que comenzó a sentir celos por su brillante protegido. Se dice que Platón y Eudoxio hicieron juntos un viaje a Egipto. De ser así, parece que Eudoxio fue menos crédulo que su predecesor Pitágoras. Platón, sin embargo, muestra los efectos de haberse incorporado buena parte del misticismo de los números, propio del Oriente.

Encontrándose poco popular en Atenas, Eudoxio se estableció y enseñó en Cycico, donde transcurrieron sus últimos años. Estudió medicina y se dice que fue un médico práctico y un legislador por encima de su Matemática. Como si todo esto no fuera suficiente, realizó un serio estudio de Astronomía, a la cual enriqueció con notables contribuciones. En su construcción científica se encontraba varios siglos adelante de sus verbalizantes y filosofantes contemporáneos. Como Galileo y Newton, tenía un gran desprecio por las especulaciones acerca del Universo físico que no podían ser comprobadas por la observación y la experiencia. Si marchando hasta el Sol, decía, pudiera decirse cuál es su forma, tamaño y naturaleza, podría correrse gustosamente el destino de Faetón, pero mientras tanto no hay necesidad de establecer conjeturas.

Alguna idea de lo que Eudoxio hizo puede obtenerse partiendo de un sencillo problema. Para encontrar el área de un rectángulo multiplicamos el largo por el ancho. Aunque esto nos parece fácil presenta graves dificultades, a no ser que ambos lados sean medibles por números racionales. Pasando por esta particular dificultad, la vemos en una forma más evidente en el siguiente tipo más sencillo de problema, el de hallar la longitud de una línea curva, o el área de una superficie curva, 0 el volumen encerrado por superficies curvas.

Quien desee comprobar su capacidad matemática, debe intentar descubrir un método para demostrar estas cosas. Supuesto que jamás lo haya visto hacer en la escuela, ¿cómo procederá para dar una prueba rigurosa de la fórmula de la longitud de una circunferencia que tenga un determinado radio? Siempre que por su propia iniciativa lo haga, puede pretender ser considerado como un matemático de primera categoría. En el momento en que se pasa de las figuras limitadas por líneas rectas o superficies planas caemos en los problemas de la continuidad, los enigmas del infinito y los laberintos de los números irracionales. Eudoxio ideó el primer método lógicamente satisfactorio que Euclides reprodujo en el Libro V de sus Elementos. En su método de exhaución aplicado al cálculo de áreas y volúmenes, Eudoxio demostró que no necesitamos aceptar la "existencia" de "cantidades infinitamente pequeñas". Para los fines de un matemático es suficiente poder llegar a una cantidad tan pequeña como queramos por la división continuada de una cierta cantidad.

Para terminar cuanto se refiere a Eudoxio mencionaremos su definición, que marca una época, de las razones iguales que capacitan a los matemáticos para tratar los números irracionales tan rigurosamente tomó los racionales. Este fue esencialmente el punto de partida de la moderna teoría de los irracionales.

"Se dice que la primera de cuatro cantidades tiene la misma razón respecto de la segunda como tiene la tercera respecto de la cuarta, cuando, siempre que consideremos equimúltiples (iguales múltiplos) de la primera y la tercera, y cualquier otro equimúltiplo de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual a, o menor que el múltiplo de la segunda, cuando el múltiplo de la tercera es mayor, igual, o menor que el múltiplo de la cuarta".

Después del año 1600 sólo Apolonio merece ser citado entre los griegos cuya obra haya influido sobre la Matemática. Apolonio (260?-200? a. de J.C.) se dedicó a la Geometría en la forma de Euclides, esa forma que es aún enseñada a los pobres principiantes, llevándola más allá del estado en que Euclides (330? - 275? a. de J.C.) la dejó. Como geómetra de este tipo, geómetra "puro", sintético, Apolonio no tiene par hasta que se llega a Steiner en el siglo xix.

Si un cono de base circular y que se extiende indefinidamente en ambas direcciones más allá de su vértice se corta por un plano, la curva que el plano determina en la superficie del cono se denomina sección cónica.

Existen cinco tipos posibles de secciones cónicas: la elipse; la hipérbola, que tiene dos ramas; la parábola, el camino de un proyectil en el vacío; la circunferencia; y un par de líneas curvas que se cortan. La elipse, la parábola y la hipérbola son "curvas mecánicas", según la fórmula platónica; es decir, estas curvas no pueden ser construidas por el solo uso de la regla y el compás, aunque sea fácil, con estos instrumentos, construir cualquier número de puntos sobre cualquiera de estas curvas. La geometría de las secciones cónicas fue llevada a un alto grado de perfección por Apolonio y sus sucesores, y pudo verse, en los siglos XVII y siguientes, que tenían máxima importancia en la mecánica celeste.

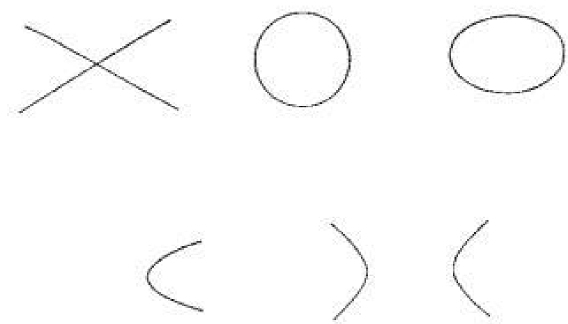


Figura 2.2

En efecto, si no hubiera sido por los geómetras griegos es poco probable que Newton hubiera llegado a su ley de la gravitación universal, para la cual Kepler preparó el camino con sus laboriosos e ingeniosos cálculos de las órbitas de los planetas.
Entre los últimos griegos y árabes de la Edad Media, Arquímedes parece haber inspirado la misma devoción y reverencia que Gauss despertó entre sus contemporáneos y continuadores en el siglo XIX y Newton en los siglos XVII y XVIII. Arquímedes fue el indiscutido jefe de todos ellos, "el anciano", "el más sabio", "el maestro", "el gran geómetra". Arquímedes vivió entre los años 287-212 a. de J. C. Gracias a Plutarco se sabe más de su muerte que de su vida y quizá no sea erróneo decir que para Plutarco, el biógrafo histórico típico, el rey de la Matemática es un personaje histórico menos importante que el soldado romano Marcelo. Sin embargo, Marcelo debe su recuerdo a Arquímedes, y al par que su recuerdo su execración. En la muerte de Arquímedes encontramos el primer golpe de una civilización groseramente práctica sobre lo más sublime que pudo destruir Roma, habiendo casi demolido Cartago, orgullosa de sus victorias, cayó con su púrpura imperial sobre Grecia para derribar su delicada fragilidad.
Arquímedes, aristócrata en cuerpo y alma, hijo del astrónomo Feidias, había nacido en Siracusa, Sicilia, y se dice que era pariente de Hierón II, tirano (o rey) de Siracusa. De todos modos se hallaba en excelentes relaciones con Hierón y su hijo Gelón, quienes tenían por el rey de la Matemática gran admiración. Su temperamento esencialmente aristocrático se manifiesta en su posición por lo que actualmente se denomina ciencia aplicada. Aunque fue uno de los más grandes genios de la mecánica, si no el más grande, el aristócrata Arquímedes tenía una sincera repugnancia por sus invenciones prácticas. Desde cierto punto de vista estaba justificado. Muchos libros podrían escribirse acerca de lo que Arquímedes hizo en la mecánica aplicada, pero, por grande que fuera esta obra, queda ensombrecida por su contribución a la Matemática pura. Estudiaremos en primer término los pocos hechos conocidos acerca de él y la leyenda de su personalidad.
Según la tradición, Arquímedes es el tipo perfecto del gran matemático que el pueblo concibe. Igual que Newton y Hamilton, se olvidaba de comer cuando estaba ensimismado en la Matemática. En su falta de atención por el vestido ha sobrepasado a Newton, pues cuando hizo su descubrimiento fundamental de que un cuerpo que flota pierde de peso una cantidad igual a la del

líquido que desaloja, salió del baño, en el cual había hecho el descubrimiento al observar su propio cuerpo flotante, y corrió por las calles de Siracusa, completamente desnudo, gritando: "Eureka, eureka" (lo encontré, lo encontré) Lo que había encontrado era la primera ley de la hidrostática. Refiere la historia que un orfebre había adulterado el oro de una corona para Hierón mezclándolo con plata, y el tirano, al sospechar el engaño, había planteado a Arquímedes el problema. Cualquier estudiante sabe cómo se resuelve, mediante un simple experimento, y algunas fáciles cuentas aritméticas, basadas en el peso específico. El principio de Arquímedes y sus numerosas aplicaciones prácticas son muy conocidos actualmente, pero el hombre que primeramente pudo formularlo tenía bastante más que sentido común. En realidad no se sabe si el orfebre fue culpable, pero de ordinario se supone que lo era.

Otra exclamación de Arquímedes que se ha conservado a través de los siglos es "dadme un punto de apoyo y moveré el mundo". La frase podía ser un perfecto lema para un Instituto científico moderno y parece extraño que no haya sido utilizada. Existe otra versión en mejor griego pero su significación es la misma.

En una de sus excentricidades Arquímedes se parecía a otro gran matemático, Weierstrass. Según una hermana de este último, no se podía confiar en él cuando tenía un lápiz en la mano y ante su vista se hallaba un trozo de pared blanco o un puño de la camisa limpio. Arquímedes batió este record en sus días, pues el suelo arenoso o la tierra lisa endurecida servía de "pizarra". Arquímedes, cuando se sentaba ante el fuego, sacaba las cenizas y dibujaba en ellas. Al salir del baño, cuando se untaba con aceite de olivas, según la costumbre de la época, en lugar de vestirse se perdía en sus dibujos que trazaba con una uña sobre su propia piel afeitada.

Arquímedes fue una especie de águila solitaria. Siendo joven había estudiado breve tiempo en Alejandría, Egipto, donde contrajo dos amistades íntimas, Conon, un matemático de talento por quien Arquímedes tenía un alto concepto personal e intelectual, y Eratóstenes, también buen matemático, aunque un completo petimetre. Estos dos, particularmente Conon, parece que fueron los únicos hombres a quienes Arquímedes participó sus pensamientos, seguro de ser comprendido. Algunos de sus trabajos más complicados fueron comunicados por cartas a Conon. Más tarde, cuando Conon murió, Arquímedes mantuvo correspondencia con Dositeo, un discípulo de Conon.

Haciendo abstracción de sus grandes contribuciones a la Astronomía y a las invenciones mecánicas, expondremos un simple e incompleto resumen de las principales contribuciones que Arquímedes hizo a la Matemática pura y aplicada.

Inventó métodos generales para encontrar las áreas de figuras planas curvilíneas y los volúmenes limitados por superficies curvas, y aplicó estos métodos a muchos casos especiales, incluyendo el círculo, la esfera, segmentos de una parábola, el área limitada entre dos radios y dos pasos sucesivos de una espiral, segmentos de esfera y segmentos de superficies engendradas por la revolución de rectángulos (cilindros), triángulos (conos), parábolas (paraboloides), hipérbolas (hiperboloides) y elipses (esferoides), alrededor de sus ejes principales. Ideó un método para calcular ((la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro), y fijó el valor de (entre 3 1/7 y 3 10/71; también encontró métodos para hallar las raíces cuadradas aproximadas, lo que muestra que se anticipó a la invención hecha por los hindúes, respecto a las fracciones continuas periódicas. En Aritmética sobrepasó extraordinariamente la incapacidad del método no científico griego de simbolizar los números al escribir o incluso escribir grandes números, e inventó un sistema de numeración capaz de tratar números tan grandes como se deseara. En mecánica estableció algunos de los postulados fundamentales, descubrió las leyes de la palanca, y aplicó sus principios mecánicos para calcular las áreas y centros de gravedad de diversas superficies

planas y sólidos de diversas formas. Creó toda la ciencia de la hidrostática, y la aplicó para encontrar las posiciones de reposo y de equilibrio de cuerpos flotantes de diversos tipos.
A Arquímedes se debe, no sólo una obra maestra, sino muchas. ¿Cómo pudo hacerlo? Sus exposiciones lógicas no permiten intuir el método de que se valió para llegar a sus maravillosos resultados. Pero en 1906, J. L. Heiberg, el historiador y estudioso de la Matemática griega, hizo en Constantinopla el notable descubrimiento de un tratado hasta entonces "perdido" de Arquímedes, dirigido a su amigo Eratóstenes: Sobre teoremas mecanices, método. En él Arquímedes explica cómo pesando, en la imaginación, una figura o sólido cuya área o volumen sea desconocida frente a una conocida se llega al conocimiento del hecho buscado; conocido el hecho, era relativamente fácil para él demostrarlo matemáticamente. Brevemente, utilizó su mecánica para hacer avanzar la Matemática. Este es uno de sus títulos para ser considerado como una mente moderna: lo utilizó todo, y todas las cosas que sugirió fueron un arma para abordar sus problemas.
Para un hombre moderno todo es sencillo en la guerra, en el amor y en la Matemática; para muchos de los antiguos la Matemática era un juego embrutecedor que había que jugar según las reglas impuestas por Platón, cuya estructura mental era filosófica. Según Platón únicamente debían ser permitidas las reglas y un par de compases como instrumentos de construcción en Geometría. No hay que admirarse de que los geómetras clásicos se golpearan las cabezas durante siglos frente a los "tres problemas de la antigüedad": la trisección de un ángulo; construir un cubo de doble volumen que otro dado; construir un cuadrado igual a un círculo. *Ninguno de esos problemas es posible hacerlo utilizando únicamente regla y compás*; aunque es difícil demostrar que el tercero no lo es, y su imposibilidad fue finalmente demostrada en 1882. Todas las construcciones efectuadas con otros instrumentos eran denominadas mecánicas, y como tal, por alguna razón mística conocida únicamente por Platón y su Dios geometrizante, eran consideradas vulgares, y tabú para una Geometría respetable[4]. Tan sólo cuando Descartes, 1985 años después de la muerte de Platón, publicó su Geometría analítica, pudo escapar la Geometría de su rigidez platónica. Platón murió 60 años o más antes de que Arquímedes naciera, de modo que no puede ser censurado, por no apreciar la potencia y libertad de los métodos de Arquímedes. Por otra parte, Arquímedes merece sólo alabanzas al no respetar esa concepción rígidamente encorsetada que Platón tenía de la musa de la Geometría.
El segundo requisito de Arquímedes para ser considerado moderno se basa también sobre sus métodos. Anticipándose a Newton y Leibniz en más de 2000 años inventó el Cálculo integral, y en uno de sus problemas anticipó la creación del Cálculo diferencial. Estos dos cálculos juntos constituyen lo que se denomina el "cálculo infinitesimal considerado como el instrumento más poderoso que se ha inventado para la exploración matemática del universo físico. Para citar un solo ejemplo, supongamos que queremos encontrar el área de un círculo. Entre otras formas de hacer esto podemos dividir el círculo en cierto número de bandas paralelas de igual anchura, reducir los extremos curvados de las bandas, de modo que los fragmentos desechados sean lo menor posible, y luego sumar las áreas de todos los rectángulos resultantes. Esto nos da una aproximación del área buscada. Aumentando el número de bandas indefinidamente y tomando el límite de la suma, encontraremos el área del círculo. Este proceso (toscamente descrito) de tomar el límite de la suma se llama integración; el método de realizar tales sumas se denomina Cálculo integral. Este cálculo fue el que Arquímedes utilizó para encontrar el área de un segmento de parábola y para otras cuestiones.

[4] En realidad la posibilidad de las construcciones con *la regla y el compás*, es según muchos eruditos la prueba de la *existencia* de la misma para los griegos (*Nota del T.*)

El problema en que utilizó el Cálculo diferencial fue el de la construcción de una tangente en un punto dado de la espiral creada por él.

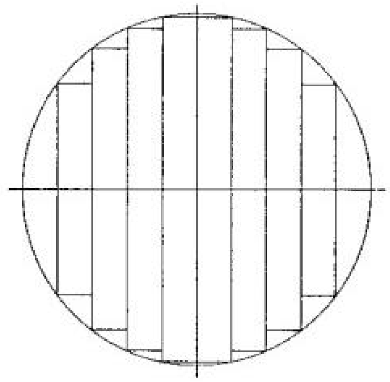


Figura 2.3

Si el ángulo que forma la tangente con cualquier línea dada es conocido, puede trazarse fácilmente, pues es una simple construcción trazar una línea recta por un punto dado paralela a una determinada línea recta. El problema de encontrar dicho ángulo (para cualquier curva, no simplemente para la espiral) es, en lenguaje geométrico, el problema principal del Cálculo diferencial. Arquímedes resolvió este problema para su espiral. Espiral es la curva descrita por un punto que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de una línea recta que gira con velocidad angular uniforme alrededor de un punto fijo de, la línea.

La vida de Arquímedes era tan tranquila como debe ser la de un matemático que ha hecho lo que él hizo. Toda la acción y tragedia de vida quedan coronadas en su muerte. En el año 212 a. de J. C. estalló la segunda guerra púnica. Roma y Cartago estaban en guerra, y Siracusa, la ciudad de Arquímedes, tentadoramente situada cerca del camino de la flota romana. ¿Porqué no ponerle sitio? Y los romanos así lo hicieron. Orgulloso de sí mismo ("descansando sobre su propia gran fama", como dijo Plutarco), y confiando en el esplendor de su "preparación" más que en los cerebros, el jefe romano, Marcelo, estaba seguro de una rápida conquista. El orgullo de su confiado corazón era .una primitiva pieza de artillería colocada sobre una elevada plataforma mantenida por ocho galeras reunidas. Considerando su fama, esperaba 'que los tímidos ciudadanos pusieran en sus manos la llave de la ciudad. Hierón no lo hizo así. Estaba bien preparado para la guerra y de una manera que el práctico Marcelo no podía soñar.

Parece que Arquímedes, aunque despreciaba la Matemática aplicada, tuvo que ceder, en tiempo de paz, a las inoportunidades de Hierón, y pudo demostrarle, con satisfacción del tirano, que la Matemática puede ser, si es necesario, prácticamente devastadora. Para convencer a su amigo de que la Matemática es capaz de algo más que de deducciones abstractas, Arquímedes aplicó sus leyes de las palancas y poleas para mover un barco totalmente cargado que él mismo pudo botar con una sola mano. Recordando esta hazaña, Hierón, al ver acercarse las nubes de la guerra, solicitó a Arquímedes que preparara una adecuada bien venida a Marcelo. Abandonando una vez más sus investigaciones para complacer a su amigo, Arquímedes preparó por sí solo un Comité de recepción que pudiera dar una sorpresa a los precipitados romanos. Cuando llegaron, sus ingeniosas diabluras estaban dispuestas para darles un buen saludo.

El aparato en forma de arpa apoyado sobre las ocho galeras no duró más que la fama del orgulloso Marcelo. Piedras, cada una de las cuales pesaba más de un cuarto de tonelada, salían de las supercatapultas de Arquímedes demoliéndolo todo. Picos y garras de hierro se alzaban sobre los muros para asir a los barcos que se acercaban, y volcándolos los arrastraban hacia la arena o los arrojaban contra las escolleras. Las fuerzas terrestres, movidas también por los aparatos de Arquímedes, no les dieron mejor acogida. Ocultando su derrota en los boletines oficiales, y considerándola como una retirada hacia una nueva posición anteriormente preparada, Marcelo conferenció con sus ayudantes. Incapaz de preparar a sus amotinadas tropas para un asalto a las terribles murallas, el famoso romano se retiró.

Bastaba cierto sentido militar para que Marcelo no incluyera en las órdenes del día "ataques contra la muralla"; abandonando todos los pensamientos de un ataque central capturó Megara en la retaguardia y finamente se dirigió hacia Siracusa. Esta vez la suerte le acompañó. Los necios habitantes de Siracusa se entregaban a una fiesta religiosa en honor de Artemisa. La guerra y la religión siempre han dado lugar a un bilioso cocktail; sorprendidos en la fiesta, Marcelo hizo una carnicería.

La primera noticia que tuvo Arquímedes de que la ciudad había sido tomada fue la sombra de un soldado romano que se proyectaba sobre sus dibujos en la arena. Un relato dice que el soldado, al pisar los dibujos, dio lugar a que Arquímedes exclamara excitadamente: "No borres mis círculos". Otros afirman que Arquímedes se negó a obedece la orden de un soldado, para que le acompañara a presencia de Marcelo, hasta que hubiera resuelto su problema. De todos modos lo cierto es que el irritado soldado desenvainó su glorioso sable y dio muerte al inerme geómetra que a la sazón tenía 70 años. Así murió Arquímedes.

Con razón, dice Whitehead: "Ningún romano ha perdido su vida por estar absorbido en la contemplación de una figura matemática".

Capítulo Tercero
Gentilhombre, Soldado y Matemático

DESCARTES

La Geometría analítica, mucho más que cualquiera de sus especulaciones metafísicas, inmortaliza el nombre de Descartes y constituye el máximo paso hecho en el progreso de las ciencias exactas.

John Stuart Mill

"DESEO UNICAMENTE TRANQUILIDAD Y REPOSO". Éstas son las palabras del hombre que desvió la Matemática hacia nuevos caminos y cambió el curso de la historia científica. Muchas veces, en su activa vida, René Descartes intentó encontrar la tranquilidad que buscaba en los campos militares, y con objeto de obtener un reposo necesario para la meditación buscó retiros solitarios lejos de los amigos curiosos y exigentes. Deseando únicamente tranquilidad y reposo, nació el 31 de marzo de 1596, en La Haye, cerca de Tours, Francia, en una Europa entregada a la guerra, en las aflicciones de la reconstrucción religiosa y política.

René Descartes

Su época no era muy diferente de la nuestra. Un viejo orden pasaba rápidamente y el nuevo no había sido aún establecido. Barones, reyes y nobles rapaces de la Edad Media, habían criado un enjambre de gobernadores con la ética política de asaltantes y en su mayor parte con la inteligencia de cargadores. La justicia común entendía que lo tuyo era mío, con tal que mi brazo fuera suficientemente fuerte para mantenerlo lejos de sí. Esto es una descripción poco halagadora de ese glorioso período de la historia, europea, denominado finales del Renacimiento, pero está de perfecto acuerdo con nuestra cambiante opinión, hija de experiencias íntimas, de, lo que sería, aquella sociedad civilizada.

Por encima de las guerras, en los días de Descartes, se superponían un enorme fanatismo religioso y una grave intolerancia que incubaban nuevas guerras y hacían del desapasionado cultivo de la ciencia una empresa azarosa. Había que añadir además una total ignorancia de las reglas más elementales de la limpieza. Desde el punto de vista de las condiciones sanitarias, la mansión de los ricos era tan inmunda como la de los pobres, sumergidos en la hediondez y la ignorancia, y las plagas que se repetían ayudaban a las guerras epidémicas a mantener a la población por debajo de los limites del hambre. Así eran los inolvidables viejos días.

En la inmaterial parte durable del andamiaje, el relato es más brillante. La edad en que Descartes vivió fue, en efecto, uno de los grandes períodos intelectuales en la historia de la civilización. Para mencionar tan sólo algunos de los hombres sobresalientes cuyas vidas coincidieron en parte con la de Descartes, recordaremos que Fermat y Pascal fueron sus contemporáneos en Matemática; Shakespeare murió cuando Descartes tenía 20 años; Descartes sobrevivió a Galileo ocho años, y Newton tenía ocho años cuando Descartes murió; Descartes tenía 12 años cuando Milton nació, y Harvey, el descubridor de la circulación de la sangre, sobrevivió a Descartes 7 años, mientras Gilbert, el fundador de la ciencia del electromagnetismo, murió cuando Descartes tenía 7 años,

René Descartes procedía de una antigua y noble familia. Aunque el padre de René no era poderoso, sus medios de fortuna le permitían vivir fácilmente, y su hijo fue destinado a la carrera de gentilhombre, *noblesse oblige*, al servicio de Francia. René fue el tercero y último hijo de la primera mujer del padre, Jeanne Brochard, quien murió pocos días después del nacimiento de René. El padre parece haber sido un hombre de raro sentido que hizo todo lo posible para educar a sus hijos sin que sintieran la pérdida de su madre. Una excelente aya tomó el lugar de la madre, y el padre, que luego volvió a casarse, mantuvo una constante e inteligente vigilancia sobre su "joven filósofo" que siempre quería conocer la causa de todas las cosas que hay bajo el sol, y por cuya razón su aya siempre le narraba cosas acerca del cielo. Descartes no fue realmente un niño precoz, pero su frágil salud le forzó a gastar la vitalidad que tenía en empresas intelectuales.

Debido a la delicada salud de René su padre demoró su enseñanza. El muchacho, sin embargo, era guiado por su propia iniciativa y su padre le dejó hacer lo que le placía. Cuando Descartes tenía ocho años, el padre resolvió que no podía retrasar más su educación formal. Después de una inteligente busca eligió el colegio de jesuitas en La Fléche como la escuela ideal para su hijo. El Rector, el Padre Charlet, tomó rápidamente cariño al pálido y confiado muchacho y estudió especialmente el caso. Puesto que se corría el peligro de destruir su cuerpo si educaba su mente, y dándose cuenta de que Descartes parecía necesitar más reposo que los niños normales de su edad, el Rector le permitió permanecer en cama cuanto quisiera durante las mañanas y que no abandonara su habitación hasta que quisiera reunirse con sus compañeros en el aula. En realidad toda su vida, excepto un desgraciado episodio, fue tranquila, y Descartes permanecía las mañanas en el lecho cuando deseaba pensar. Recordando más tarde sus días escolares en La Fléche, confiesa que aquellas largas y tranquilas mañanas de silenciosa meditación fueron el verdadero origen de su filosofía y de su matemática.

Sus estudios marcharon bien y logró ser un buen clasicista. Según la tradición de la época, se prestaba mucha atención al latín, al griego y a la oratoria. Pero esto fue sólo una parte de lo que Descartes aprendió. Sus maestros eran hombres de mundo y su deseo era educar a los muchachos a su cargo para que fueran "Gentlemen", en el mejor sentido de esa degradada palabra, para su desempeño en la vida. Cuando abandonó la escuela, en agosto de 1612, teniendo 17 años, Descartes había hecho una buena amistad con el padre Charlet. Éste no fue el único de los amigos que Descartes hizo en La Fléche; otro, Mersenne (más tarde sacerdote), el famoso aficionado a la ciencia y a la Matemática, fue su más antiguo compañero y llegó a ser su agente científico y protector en jefe.

El talento especial de Descartes ya se manifestó mucho antes de abandonar la escuela. A la edad de 14 años, meditando en el lecho, comenzó a sospechar que las "humanidades" que estaba aprendiendo eran relativamente desprovistas de significación humana, y ciertamente no constituían el tipo de aprendizaje que capacitara a los seres humanos para gobernar su medio y directamente su propio destino. Los dogmas autoritarios de filosofía ética y moral, que debían ser aceptados ciegamente, comenzaron a adquirir el aspecto de supersticiones sin base. Persistiendo en su costumbre infantil de no aceptar nada que dimanara de la simple autoridad, Descartes comenzó sin jactancia a discutir las demostraciones alegadas y la lógica casuística en virtud de la cual los buenos jesuitas pensaban obtener el asentimiento de sus facultades razonadoras. Más tarde pasó a la duda fundamental que inspira la obra de su vida: ¿Sabemos algo? Y además, quizá de mayor importancia, si nosotros no podemos decir definidamente que sabemos algo, ¿cómo descubriremos aquellas cosas que podemos ser capaces de conocer?

Al abandonar la escuela, el pensamiento de Descartes se hizo más profundo e intenso. Como primer fruto de sus meditaciones aprendió la verdad herética de que la Lógica por sí misma -el gran método de los escolásticos de la Edad Media que aún permanece tenazmente en la educación humanística- es tan estéril como una mula para cualquier propósito humano creador. Su segunda conclusión está, íntimamente relacionada a la primera: comparadas con las demostraciones de la Matemática -a las cuales se asió como un pájaro pende en el aire tan pronto como encuentra sus alas- las de la filosofía ética y moral son fraudes chillones. ¿Cómo entonces, se preguntaba, podremos descubrir alguna cosa? Por el método científico, aunque Descartes no lo llamaba así: por el experimento controlado y la aplicación del rígido razonamiento matemático a los resultados de tal experimento.

Puede preguntarse qué, es lo que adquirió de su racional escepticismo. Un hecho y sólo uno: "*Yo existo*". Descartes dijo: *"Cógito, ergo sum"* (pienso, luego existo).

A la edad de 18 años Descartes, totalmente disgustado por la aridez de los estudios a los que había dedicado tan dura labor, resolvió ver el mundo y aprender alguna cosa de la vida que se encontrara en la carne y en la sangre y no en el papel y en la tinta de imprenta. Dando gracias a Dios de ser capaz de hacer lo que le pluguiera, procedió a hacerlo. Por una comprensible revancha por su infancia y juventud físicamente inhibidas se entregó a los placeres propios de los muchachos de su edad. Con otros varios jóvenes calaveras hambrientos de vida, abandonó la sobriedad de las propiedades paternales y se estableció en París. Uno de los entretenimientos de un gentleman de aquellos días era jugar, y Descartes jugó con entusiasmo y cierto buen resultado. Siempre que lo hizo puso en ello toda su alma.

Esta fase no duró largo tiempo. Avergonzado de sus indecorosos compañeros, Descartes huyó de ellos y tomó su decisión alquilando un alojamiento confortable en el ahora barrio de Saint Germain, donde por dos años se encerró en una incesante investigación matemática. Al fin sus torpes amigos le encontraron y cayeron sobre él con gran algarabía. El estudioso joven los contempló, y al reconocerlos vio que eran los mismos intolerables ganapanes. Buscando una pequeña paz, Descartes se decidió a ir a la guerra.

Así comenzó su primer período como soldado. Marchó primeramente a Breda, Holanda, para aprender su oficio bajo las órdenes del brillante Príncipe Maurice d'Orange. Al ver fracasadas sus esperanzas bajo los colores del príncipe, Descartes volvió disgustado a la vida pacífica del campo, que amenazaba ser tan odiosa como la del bullicioso París, y entonces se dirigió a Alemania. En este punto de su carrera mostró los primeros síntomas de una suave languidez que

nunca fue a más. Como un muchachuelo que siguiera a un circo de pueblo en pueblo, Descartes tuvo la favorable oportunidad de contemplar un brillante espectáculo. Por entonces llegó a Francfort, donde Fernando II iba a ser coronado. Descartes llegó a tiempo para contemplar aquellas ceremonias rococó. Animado por aquel brillo, volvió a su profesión y se alistó bajo las banderas del Elector de Baviera, que entonces emprendía la guerra contra Bohemia.
El ejército permaneció inactivo en sus cuarteles de invierno cerca del pequeño pueblo de Neuburg en las orillas del Danubio. Allí Descartes encontró plenamente lo que había buscado; tranquilidad y reposo. Se abandonó a sí mismo y se encontró a sí mismo.
La historia de la "conversión" de Descartes, si puede ser llamada así, es, extraordinariamente curiosa. El 10 de noviembre de 1619, en Eve de St. Martín, Descartes tuvo tres sueños que, según él dice, cambiaron todo el curso de su vida. Su biógrafo (Baillet) refiere el hecho de que Descartes había estado bebiendo abundantemente en la celebración de la fiesta del Santo, y dice que quizá no se había recobrado de los vapores del vino cuando marchó a su casa. Pero Descartes atribuye sus sueños a otra causa y afirma que no había bebido vino durante los tres meses anteriores. No hay razón para dudar de sus palabras. Los sueños son singularmente lógicos y no es probable (según los especialistas) que fuera inspirado por una orgía, especialmente teniendo lleno el estómago de vino. Son fácilmente explicables como la solución subconsciente de un conflicto entre el deseo del soñador de llevar una vida intelectual y su conocimiento de la futilidad de la vida hasta entonces llevada. Sin duda, los freudianos han analizado estos sueños, pero no parece probable que cualquier análisis en la forma clásica vienesa arroje una luz sobre la invención de la Geometría analítica, que en este lugar nos interesa. Tampoco las diversas interpretaciones místicas o religiosas podrían prestarnos gran ayuda a este respecto.
En el primer sueño, Descartes era lanzado por malignos vientos desde la seguridad de su iglesia-colegio hacia un tercer lugar donde el viento carecía de poder para sacudirle o arrastrarle; en el segundo, se encontraba observando una terrible tormenta con los ojos no supersticiosos de la ciencia, y notaba que la tormenta, una vez que veía lo que era, no podía atemorizarle; en el tercero soñó que estaba recitando el poema de Ausonio que comienza: "*Quod vitae secatabor iter*?" (¿Qué vía seguiré en la vida?).
Aparte de esto, Descartes decía que estaba lleno de "entusiasmo" (probablemente quiere dar a esta palabra su sentido místico), y que le había sido revelada, como en el segundo sueño, la llave mágica con que podría penetrar en el tesoro de la naturaleza y encontrarse en posesión del verdadero fundamento, al menos, de todas las ciencias.
¿Qué era esta maravillosa llave? Descartes mismo no parece ser muy explícito, pero de ordinario se cree que era nada menos que la aplicación del Algebra a la Geometría, la Geometría analítica, y, de un modo más general, a la exploración de los fenómenos naturales por la Matemática, de la cual la Física matemática actual es el ejemplo en que se ha desarrollado más.
El 10 de noviembre de 1619 es, pues, el día oficial en que nació la Geometría analítica, y, por tanto, también la Matemática moderna. Dieciocho años pasaron hasta que el método fue publicado. Mientras tanto Descartes continuó su vida de soldado. Desde el punto de vista de la Matemática puede darse las gracias a Marte por evitar que alguna bala perforara su cabeza en la batalla de Praga.
Los jóvenes matemáticos de los tres siglos siguientes fueron menos felices, debido a los progresos de esa ciencia que el sueño de Descartes inspiró.
El joven soldado, que entonces tenía 22 años, jamás se había dado cuenta hasta entonces de que si debía encontrar la verdad tendría que rechazar absolutamente todas las ideas adquiridas de otros, y confiar en que su propia mente mortal le mostrara el camino. Todos los conocimientos que había recibido debían ser olvidados; todas las ideas morales e intelectuales heredadas tendrían

que ser modificadas haciéndose más sólidas, gracias únicamente a la poderosa fuerza de la razón humana. Para aplacar su conciencia pidió a la Santa Virgen que le ayudara en su proyecto herético. Dada por concedida esa ayuda, prometió hacer un peregrinaje a la capilla de Nuestra Señora de Loreto y procedió inmediatamente a someter las verdades aceptadas de la religión a una crítica ardiente y devastadora.

Mientras tanto continuó su vida de soldado y en la primavera de 1620 asistió a los combates en la batalla de Praga. Con el resto de las tropas victoriosas penetró en la ciudad cantando leas a Dios. Entre los aterrorizados refugiados se hallaba la princesa Isabel[1], de cuatro años de edad, que más tarde había de ser la discípula favorita de Descartes.

Al fin, en la primavera de 1621, Descartes se dio un hartazgo de guerra. Con varios otros gentileshombres-soldados acompañó a los austriacos a Transilvana, buscando gloria y encontrándola. Pero aunque fuera ducho en la guerra todavía no estaba maduro para la filosofía. La peste en París y la guerra contra los hugonotes hizo de Francia un lugar menos atractivo que Austria. En Europa del Norte todo era paz y tranquilidad, y Descartes decidió ir allí. Las cosas iban bastante bien hasta que Descartes se despidió de todos sus guardias de corps antes de embarcarse para Frisia. Era una gran oportunidad para las bandas de asesinos, que decidieron dar muerte al rico pasajero, robarle, y arrojar su cadáver a los peces. Desgraciadamente para sus planes, Descartes comprendió su lenguaje, y sacando su espada les obligó a dejarle otra vez en la costa. La Geometría analítica había escapado nuevamente de los accidentes de la batalla, de los asesinos y de la muerte precoz.

El año siguiente Descartes lo empleó en visitas a Holanda y Rennes, donde vivía su padre. Al finalizar el año volvió a París, y allí sus modos reservados y su algo misterioso aspecto dio lugar a que se le acusara de ser Rosa Cruz. Dejando a un lado las habladurías, Descartes filosofaba e incitaba a los políticos a enviarle en una misión al ejército. No quedó desalentado cuando fracasó en su intento, pues pudo visitar libremente Roma, donde gozó del más brillante espectáculo que sus ojos vieran: la ceremonia celebrada cada cuarto de siglo por la Iglesia católica. Este interludio italiano tiene importancia en el desarrollo intelectual de Descartes por dos razones. Su filosofía, que nunca llegó a tocar al hombre de pueblo, estaba permanentemente predispuesta en contra de los individuos de baja estofa, pues el filósofo había quedado asombrado y asqueado de la sucia humanidad que desde todos los rincones del mundo se reunía para recibir la bendición papal. Igualmente importante fue el fracaso de Descartes para encontrarse con Galileo. Si el matemático hubiera tenido la filosofía suficiente para postrarse una semana o dos ante los pies del padre de la ciencia moderna, sus especulaciones sobre el Universo físico hubieran sido menos fantásticas. Todo lo que Descartes obtuvo de su viaje por Italia fue un celoso resentimiento para su incomparable contemporáneo .

Inmediatamente después de sus vacaciones en Roma, Descartes gozó de otra orgía de sangre con las tropas del Duque de Saboya, distinguiéndose tanto que le fue ofrecido el cargo de lugarteniente. Descartes tuvo el suficiente sentido para rechazarlo. De vuelta al París, del Cardenal Richelieu y del fanfarrón D'Artagnan, el último casi una ficción, y el primero menos creíble que un melodrama, Descartes dedicó allí tres años a la meditación. A pesar de sus extraordinarios pensamientos no era un sabio de barba gris con un sucio vestido, sino un hombre elegante, ataviado con un tafetán de moda y un sable propio de su calidad de gentilhombre. Para completar sus elegancias, se cubría con un sombrero de anchas *alas* y una pluma de avestruz. Así equipado, estaba dispuesto a luchar contra los bandidos que infestaban la Iglesia, el Estado y las calles. En una ocasión en que un borracho insultó a una dama ante Descartes, el irritado filósofo

[1] Hija de Federico, Elector palatino del Rin y Rey de Bohemia, y nieta de Jaime I de Inglaterra.

montó en cólera como un D'Artagnan, y habiendo despojado de su espada al borracho le perdonó la vida, no porque fuera un espadachín, sino por tratarse de un sujeto demasiado inmundo para ser muerto ante una mujer bella.

Hemos mencionado a una de las amigas de Descartes, pero no ahondaremos en esta cuestión. Descartes gustaba de las mujeres suficientemente hasta el punto de tener una hija con una. La muerte precoz de la niña le afectó profundamente. Posiblemente su razón para no casarse pudo haber sido, como respondió a una dama, que prefería la verdad a la belleza; pero parece más probable que no estaba dispuesto a sacrificar su tranquilidad y reposo por alguna viuda holandesa rica y gorda. Los recursos económicos de Descartes no eran muy brillantes, pero le eran suficientes. Por esto ha sido llamado frío y egoísta. Parece más exacto decir que sabía a dónde se dirigía y que se daba cuenta de la importancia de su meta. Sobrio y abstemio en sus costumbres, no imponía en su casa el régimen espartano que algunas veces prescribía para sí mismo. Sus sirvientes le adoraban y él se interesaba por su bienestar largo tiempo después que habían prestado sus servicios. El muchacho que se hallaba con él cuando murió, no podía consolarse de la muerte de su patrón. Quien obra así no puede ser llamado egoísta.

Descartes ha sido también acusado de ateísmo. Nada más lejos de la verdad. Sus creencias religiosas no habían sido afectadas por su escepticismo racional. Comparaba su religión con el aya de la cual había recibido su enseñanza, y declaraba que encontraba tan cómodo descansar en una como en la otra. Una mente racional es, en ocasiones, la mezcla más extraordinaria de racionalidad e irracionalidad.

Otra particularidad influyó sobre todos los actos de Descartes, hasta que gradualmente desapareció bajo la rígida disciplina del soldado. Su delicada infancia puso en él un profundo matiz de hipocondría y durante años sufrió de un angustioso temor a la muerte. Éste fue, sin duda, el origen de sus investigaciones biológicas. Durante su juventud, decía sinceramente que la naturaleza es el mejor médico, y que el secreto de mantenerse bien es perder el temor a la muerte. Más tarde no intentó ya descubrir los medios de prolongar la existencia.

Sus tres años de meditación pacífica en París fueron los más felices años de la vida de Descartes. Los brillantes descubrimientos de Galileo, con su telescopio toscamente construido, dieron lugar a que la mitad de los filósofos naturales de Europa se proveyeran de lentes. Descartes se divirtió de igual forma, pero no hizo el menor descubrimiento. Su genio era esencialmente matemático y abstracto. Un descubrimiento que hizo en esta época, el del principio de las velocidades virtuales en mecánica, es aún de importancia científica. Se trata realmente de una obra de primer orden. Al darse cuenta de que era poco comprendido o apreciado, abandonó los problemas abstractos y se dirigió a lo que consideraba lo más excelso de todos los estudios, el del hombre. Pero, como hizo notar pronto, descubrió que el número de quienes comprenden al hombre es despreciable en comparación con el número de quienes creen comprender la Geometría.

Hasta entonces Descartes no había publicado nada. Su reputación, que rápidamente ascendía, volvió a atraer gran número de aficionados a esos estudios, y una vez más Descartes buscó tranquilidad y reposo en el campo de batalla, ahora con el rey de Francia en el sitio de La Rochelle. Allí pudo conocer al astuto y atractivo Cardenal Richelieu, que más tarde habría de prestarle un buen servicio, y quedó impresionado, no por la sagacidad del Cardenal, sino por su santidad. Terminada victoriosamente la guerra, Descartes volvió con la piel entera a París; entonces experimentó su segunda conversión, que le llevó a abandonar para siempre las vanidades.

Tenía entonces (1628) 32 años y sólo una milagrosa suerte había salvado a su cuerpo de la destrucción y a su mente del olvido. Una bala extraviada en La Rochelle pudo fácilmente haber privado a Descartes del recuerdo de la posteridad, y al fin se dio cuenta de que había llegado el

momento de no seguir por ese camino. Dos Cardenales, De Bérulle y De Bagné, le sacaron de su estado estéril de pasiva indiferencia, y al primero, en particular, el mundo científico le debe imperecedera gratitud por haber inducido a Descartes a publicar sus pensamientos.
La Iglesia católica de la época cultivaba y amaba apasionadamente las ciencias, en contraste con los fanáticos protestantes, cuyo fanatismo había extinguido las ciencias en Alemania. Al conocer a De Bérulle y De Bagné, Descartes pudo florecer como una rosa bajo su aliento genial. En particular, durante las veladas en la casa del Cardenal De Bagné, Descartes hablaba libremente de su nueva filosofía a un tal Mr. de Chandoux, que más tarde fue colgado por falsificador, aunque esperamos que esto no haya sido un resultado de las lecciones de Descartes. Para hacer resaltar la dificultad de distinguir lo verdadero de lo falso, Descartes presentaba 12 argumentos irrefutables que demostraban la falsedad de cualquier verdad indudable; inversamente, hacían pasar por verdadera cualquier falsedad admitida. ¿Cómo, entonces, preguntaban los asombrados oyentes, los simples seres humanos distinguirían la verdad de la falsedad? Descartes creía disponer de un método infalible, deducido de la Matemática, para hacer la distinción requerida. Esperaba y planeaba, según él decía, demostrar que su método sería aplicable a la ciencia y al bienestar humano a través de la invención mecánica.
De Bérulle estaba profundamente agitado por la visión de todos los reinos de la tierra con que Descartes le había tentado desde el pináculo de la especulación filosófica. En términos convincentes le mostraba a Descartes que su deber para con Dios era hacer conocer sus descubrimientos al mundo, y le amenazaba con el fuego del infierno o al menos con la pérdida de la posibilidad de entrar en el cielo si no lo hacía. Siendo Descartes un católico practicante, no podía resistir ese argumento, y decidió publicar sus ideas. Ésta fue su segunda conversión, a la edad de 32 años. Rápidamente se retiró a Holanda, donde el clima más frío y apropiado para él le permitiría llevar su decisión a la realidad.
En los 20 años siguientes viajó por toda Holanda sin jamás detenerse largo tiempo en un lugar. Prefirió las aldeas oscuras y las posadas silenciosas fuera de las grandes ciudades, transportando metódicamente una voluminosa correspondencia científica y filosófica con los mayores intelectos de Europa, para la que servía de intermediario el fiel amigo de sus días escolares en La Fléche, el Padre Mersenne, quien era el único que conocía en todo momento el secreto de la dirección de Descartes. El locutorio del convento de los Mínimos, no lejos de París, llegó a ser el lugar del intercambio (a través de Mersenne) de los problemas matemáticos, de las teorías científicas y filosóficas y de las objeciones y réplicas.
Durante su largo vagar por Holanda, Descartes se ocupó de otra serie de estudios aparte de la filosofía y matemática. La óptica, la química, la física, la anatomía, la embriología, la medicina, las observaciones astronómicas y la meteorología, hasta un estudio del arco iris, reclamaron una participación, de su inquieta actividad. Cualquier hombre que actualmente extendiese su esfuerzo a tan diferentes temas se consideraría a sí mismo como un simple aficionado. Pero en los tiempos de Descartes no era lo mismo; un hombre de talento podía aún encontrar algo de interés en casi todas las ciencias. Todo lo que llegaba hasta Descartes era molido en su molino. Una breve visita a Inglaterra le permitió conocer el comportamiento engañoso de la aguja magnética; desde entonces el magnetismo fue incluido en su filosofía comprensiva. También las especulaciones de la teología llamaron su atención.
Todo lo que Descartes recogió fue incorporado a un enorme tratado, *Le Monde.* En 1634, Descartes, que entonces tenía 38 años, sometió su tratado a la última revisión. Iba a ser un regalo de nuevo año para el padre Mersenne. Todo el París docto estaba ansioso por ver la obra maestra. Mersenne ya conocía algunas partes seleccionadas de libro, pero aún no había visto la obra completa. Sin irreverencia, *Le Monde* puede ser descrito como lo que el autor del libro del

Génesis hubiera escrito de conocer tantas ciencias y filosofía como Descartes conocía. Descartes relata la creación del Universo por Dios, subsanando la falta de un elemento de racionalidad, en la creación de los 6 días, que algunos lectores han sentido en la historia de la Biblia, A la distancia de 300 años no hay gran diferencia entre el Génesis y Descartes, y es bastante difícil para nosotros darnos cuenta de que un libro como *Le Monde* pudiera provocar en un Obispo o en un Papa una fría y sanguinaria rabia.

Descartes era muy cauto de los juicios de la justicia eclesiástica. Conocía también las investigaciones astronómicas de Galileo y de los arriesgados defensores del sistema de Copérnico. En efecto, estaba impaciente, esperando ver la última obra de Galileo antes de dar los toques finales a su obra, y en vez de recibir la copia que un amigo había prometido enviarle, recibió las asombrosas nuevas de que Galileo, a los 70 años de edad y a pesar de la sincera amistad que el poderoso Duque de Toscana tenía por él, había sido conducido a la Inquisición y forzado (22 de junio de 1633) a abjurar de rodillas, como una herejía, de la doctrina de Copérnico de que la Tierra se mueve alrededor del Sol. Descartes tan sólo podía hacer conjeturas acerca de lo que hubiera sucedido a Galileo de negarse a abjurar de sus conocimientos científicos, pero los nombres de Bruno, Vanini y Campanella vinieron a su memoria.

Descartes estaba abrumado. En su misma obra exponía el sistema de Copérnico como una cuestión ya admitida. De su propia cuenta había ido mucho más lejos que Copérnico o Galileo, debido a que estaba interesado en la teología de las ciencias, que a Copérnico y Galileo poco les importaba. Había demostrado, a su propia satisfacción, la *necesidad* del Cosmos tal como existe y le parecía que si Dios, hubiera creado cierto número de Universos diferentes, todos ellos, bajo la acción de la "ley natural", hubieran caído más pronto o más tarde en la línea de la *necesidad* y habrían evolucionado hasta constituir el Universo como, realmente es. Brevemente, Descartes, con su conocimiento científico, parecía conocer mucho más acerca de la naturaleza y caminos que Dios sigue, que el autor del Génesis o los teólogos. Si Galileo había sido forzado a abjurar de rodillas de su moderada y conservadora herejía, ¿qué podría esperar Descartes?

Decir que tan sólo el temor detuvo la publicación de *Le Monde* es no conocer la parte más importante de la verdad. No sólo estaba amedrentado, como cualquier individuo lo hubiera estado en su lugar; también estaba profundamente confundido. Se hallaba tan convencido de la verdad del sistema de Copérnico como de la infalibilidad del Papa. Ahora el Papa se le aparecía un necio al contradecir a Copérnico. Éste fue su primer pensamiento. Su enseñanza casuística, venía en su ayuda. De alguna forma, mediante alguna síntesis sobrehumana incomprensiblemente mística, el Papa y Copérnico podrían demostrar que ambos tenían razón. En consecuencia, Descartes esperaba confiadamente que llegaría el día en que podría contemplar con la serenidad filosófica el desvanecimiento de la aparente contradicción en una gloria de reconciliación. Era imposible para él dar la razón al Papa o a Copérnico. Suspendió, pues, la publicación de su libro, manteniendo su creencia en la infalibilidad del Papa y en la verdad del sistema de Copérnico. Como una satisfacción para sus opiniones subconscientes decidió que *Le Monde* fuese publicado después de su muerte. Para entonces quizá habría muerto el Papa y la contradicción habría quedado resuelta por sí misma.

La determinación de Descartes referíase a toda su obra. Pero en el año 1637, cuando Descartes tenía 41 años, sus amigos consiguieron que venciera su repugnancia y le indujeron a que permitiera la impresión de su obra maestra con el siguiente título: *Discurso sobre el método de conducir rectamente la razón y buscar la verdad en las ciencias. Además, la dióptrica, meteoros y geometría, ensayos en este método*. Su obra se conoce con el nombre abreviado *El Método.* Fue publicada el 8 de junio de 1637. Este es pues, el día en que la Geometría analítica surgió al

mundo. Antes de señalar por qué esa Geometría es superior a la Geometría sintética de los griegos, terminaremos la biografía de su autor.
Después de haber dado las razones de la demora en la publicación, sólo nos queda contemplar el otro y más brillante lado de la historia. La Iglesia, a la que Descartes había temido, pero que jamás había estado contra él, le prestó más generosamente su ayuda. El Cardenal Richelieu concedió a Descartes el privilegio de publicar tanto en Francia como en el extranjero lo que quisiera escribir (de pasada podemos preguntarnos, sin embargo, qué derecho divino o humano puede tener el Cardenal Richelieu o cualquier otro mortal para dictar a un filósofo y hombre de ciencia lo que él debe o no debe publicar). Pero en Utrecht, Holanda, los teólogos protestantes condenaron salvajemente la obra de Descartes como atea y peligrosa para esa mística entidad conocida como "el Estado". El liberal Príncipe de Orange intervino con su gran influencia en favor de Descartes y el obstáculo fue vencido.
Desde el otoño de 1641, Descartes había estado viviendo en una pequeña aldea cerca de Hague, en Holanda, donde la exilada princesa Isabel, ahora ya una muchacha con una gran inclinación por aprender, se hallaba en el campo con su madre. La princesa parece haber sido un prodigio de inteligencia. Después de dominar seis lenguas y digerir abundante literatura, se encaminó hacia la Matemática y la ciencia en general, esperando encontrar alimento más nutritivo. El desusado apetito por aprender de esta muchacha se atribuye a un desengaño amoroso. Ni la Matemática ni las otras ciencias le satisfacían. Entonces el libro de Descartes cayó en sus manos y se dio cuenta de que había encontrado lo que necesitaba para llenar su doloroso vacío: Descartes. Fue arreglada una entrevista con el algo más predispuesto filósofo.
Es muy difícil comprender exactamente lo que le ocurrió después. Descartes era un gentleman, con toda la devoción y reverencia de un gentleman de aquellos tiempos galantes, aun para el último príncipe o la última princesa. Sus cartas son modelo de cortesana discreción, pero algo se encuentra en ellas que no siempre es totalmente exacto. Un malicioso párrafo, citado en determinado momento, probablemente nos dice más de lo que Descartes realmente pensaba de la capacidad intelectual de la princesa Isabel que lo que puedan decirnos todos los pliegos de sutil alabanza que Descartes escribiera acerca de su vehemente discípula, con un ojo en su estilo y el otro en la publicación después de su muerte.
Isabel insistía en que Descartes le diera lecciones. Oficialmente el filósofo declara que "de todos mis discípulos ella es la única que ha comprendido mis obras completamente". No hay duda que Descartes estaba encariñado con su discípula de un modo paternal, pero creer que lo que él dice es un juicio científico significa llevar la credulidad hasta el límite, a no ser que pretenda hacer un torcido comentario de su propia filosofía. Isabel puede haber comprendido mucho, pero paree que en realidad sólo un filósofo comprende completamente su propia filosofía, aunque cualquier necio crea comprenderla.
Entre otras partes de su filosofía Descartes expuso a su discípula el método de la Geometría analítica. Existe cierto problema en la Geometría elemental que puede ser fácilmente resuelto por la Geometría Pura y de un modo bastante fácil, pero que es un perfecto jeroglífico para ser tratado por la Geometría analítica en la estricta forma cartesiana. Se trata de construir un círculo que toque (sea tangente a tres círculos tomados al azar cuyos centros no se encuentran alineados. Hay ocho soluciones posibles. El problema es una muestra perfecta de una cuestión que no es apropiada a la fuerza bruta de la Geometría cartesiana elemental. *Isabel lo resolvió por los métodos de Descartes*. Fue una crueldad de él permitir que su discípula lo hiciera. La pobre muchacha estaba muy orgullosa de su hazaña. Descartes dijo que sería muy difícil encontrar la solución, pero realmente construyó el círculo tangente requerido en un mes. Esto demuestra mejor que otra cosa sus aptitudes para la Matemática.

Cuando Isabel abandonó Holanda mantuvo correspondencia con Descartes hasta casi el día de su muerte. Sus cartas son delicadas y sinceras, pero desearíamos realmente que no haya sido deslumbrado por el aura de la realeza.
En 1646 Descartes vivía en un feliz retiro en Egmond, Holanda, meditando, cuidando su pequeño jardín, y manteniendo una correspondencia de increíble abundancia con los intelectuales de Europa. Su máxima obra matemática ya había sido realizada, pero aún continuaba pensando en la Matemática, siempre con penetración y originalidad. Un problema al cual prestó gran atención fue el de Aquiles y la tortuga planteado por Zenón. La solución de la paradoja no puede ser universalmente aceptada en la actualidad, pero era ingeniosa para su época. A la sazón tenía 50 año, y era famoso en el mundo, mucho más famoso, en efecto, de lo que él hubiera pensado ser. El reposo y la tranquilidad, que ya creía gozar para toda su vida, volvieron a huir. Descartes continuaba realizando su gran obra, pero no, fue dejado en paz para que llevara a cabo todo lo que aún había dentro de él. La reina Cristina de Suecia había oído hablar de Descartes.
Esta mujer algo masculina, que entonces tenía 19 años, ya era una gobernante capaz que conocía los clásicos (aunque los conoció mejor más tarde), una atleta delgada y fuerte con la resistencia física del mismo Satán, una hábil cazadora, una experta amazona que permanecía 10 horas en la silla sin fatigarse, en fin, aunque era un ejemplo de feminidad, se había endurecido para el frío como un leñador sueco. A todo esto se asociaba cierta antipatía para las debilidades de la gente de piel menos curtida. Sus comidas eran frugales, y también las de sus cortesanos. Como una rana invernante, permanecía durante largas horas en una biblioteca sin fuego, en el corazón del invierno sueco, con los dientes apretados contemplaba las ventanas abiertas de par en par que dejaban penetrar la alegre nieve. Conocía todo lo que podía conocerse; así decían sus ministros y tutores. Como le eran suficientes cinco horas de sueño, mantenía a sus aduladores en pie durante las restantes. Cuando con sacro terror conoció la filosofía de Descartes decidió que debía incorporar a su corte al pobre dormilón, como instructor privado. Todos los estudios hasta entonces hechos le habían dejado hambrienta por conocer nuevas cosas. Como la erudita Isabel, la reina Cristina sabía que sólo las copiosas duchas de filosofía proporcionadas por el filósofo podrían aliviar su sed de conocimiento y sabiduría.
Descartes pudo haber resistido los halagos de la reina Cristina hasta que tuviera 90 años, y estuviera sin dientes, sin cabello, sin filosofía y sin nada, y Descartes se mantuvo firme hasta que ella envió al almirante Fleming, en la primavera de 1649, mandando un barco para él fletado. Toda la nave fue generosamente puesta a disposición del filósofo. Descartes pudo ir contemporizando hasta octubre, pero entonces, lanzando una última y triste mirada a su pequeño jardín, abandonó Egmond para siempre.
Su recepción en Estocolmo fue ruidosa aunque no se puede decir que real. Descartes no quiso vivir en palacio, aunque se le habían preparado habitaciones. Inoportunamente, amigos cariñosos, los Chanutes, le arrebataron la última esperanza que le quedaba de conservar un pequeño aislamiento, insistiendo en que viviera con ellos. Chanutes era un compatriota, pues se trataba del embajador francés. Todo pudo haber marchado bien, pues los Chanutes eran realmente muy cordiales, pero la tenaz Cristina seguía pensando que las cinco de la mañana era la hora más adecuada para que una mujer atareada pudiera dedicarse al estudio de la filosofía. Descartes hubiera cambiado todas las tozudas reinas de la cristiandad por un tranquilo sueño matinal en La Fléche, donde el culto padre Charlet vigilaba para que Descartes no se levantara demasiado pronto. Sin embargo, debía arrojarse del lecho cuando todavía era de noche, saltar sobre el carruaje que le enviaban para recogerle y atravesar la más despoblada y ventosa zona de Estocolmo, para llegar al palacio donde Cristina,, sentada en la glacial biblioteca esperaba impacientemente su lección de filosofía, que debía comenzar a las cinco en punto.

Los más viejos habitantes de Estocolmo decían que jamás recordaban haber sufrido un invierno tan frío. Cristina parecía estar privada de piel y de nervios. No se daba cuenta de nada y esperaba inflexiblemente a Descartes en su terrible rendez-vous. Descartes intentaba reposar acostándose durante las tardes, pero pronto la reina también le privó de ello. Una Real Academia Sueca de Ciencias se estaba gestando en su prolífica actividad y Descartes debía ayudar al alumbramiento. Bien pronto se dijo entre los cortesanos que Descartes y su reina hablaban mucho más que de filosofía en estas interminables conferencias. El filósofo se daba ahora cuenta de que se había metido con ambos pies en un nido de avispas. Los cortesanos le punzaban siempre y siempre que podían. Entre tanto la reina o era tan sorda que no se daba cuenta de lo que se decía de su nuevo favorito o se daba demasiada cuenta y punzaba a sus cortesanos a través de su filósofo.
De todos modos, para silenciar los maliciosos chistes de "influencia extranjera", resolvió hacer un sueco de Descartes, y así lo hizo por real decreto. Cuanto mayor era su desesperación, más profundamente se hundía en aquel avispero. A primero de enero de 1650 estaba ya hasta la punta de los pelos, y sólo de un milagro de grosería podía esperar el recobro de su libertad. Pero con su ingénito respeto por la realeza no podía pronunciar las mágicas palabras que le hubieran devuelto rápidamente a Holanda, y así lo confesaba con la mayor cortesía, en una carta a su devota Isabel. Intentó interrumpir una de las lecciones de griego. Con gran asombro Descartes observó que la elogiada experta en los clásicos se detenía en puerilidades gramaticales que, según él decía, había aprendido por sí mismo cuando era un muchachuelo. Por tanto, la opinión que tenía de su talento, aunque respetuosa, era mala. Ante su insistencia de que preparara un ballet para deleite de sus huéspedes en una corta función, se negó absolutamente a convertirse en un payaso, aprendiendo a su edad las cabriolas de los lanceros suecos.
Por entonces, Chanutes cayó gravemente enfermo de pulmonía. Descartes le cuidó. Chanutes se restableció, pero Descartes cayó enfermo de la misma enfermedad. La reina se alarmó y envió sus médicos, pero Descartes ordenó que abandonaran la habitación. Cada vez se sentía peor. Incapaz en su debilidad de distinguir amigos de enemigos, consintió al fin ser sangrado por el más tenaz de los doctores, un amigo personal que estuvo esperando todo el tiempo a que se le concediera entrar. El doctor casi acabó con él, pero no completamente.
Sus buenos amigos, los Chanutes, observando que estaba muy grave, sugirieron que lo mejor sería administrarle el último Sacramento. Descartes expresó el deseo de ver a su consejero espiritual. Encomendando su alma a la merced de Dios, Descartes enfrentó tranquilamente su muerte, pidiendo que el sacrificio de su vida le redimiera de sus pecados. La Fléche le atendió hasta última hora, y el consejero, le preguntó si deseaba la última bendición. Descartes abrió los ojos y los cerró. Le fue dada la bendición. Así murió el 11 de febrero de 1650, a los 54 años de edad, sacrificado por la impetuosa vanidad de una tozuda muchacha.
Cristina lamentó su muerte. Diecisiete años más tarde, cuando ella ya había renunciado al trono, los huesos de Descartes fueron devueltos a Francia (todos, excepto los de la mano derecha, que fueron conservados por el tesorero general francés como pago de la habilidad desplegada para conseguir el cadáver), y últimamente enterrados en París donde ahora es el Panteón. Por orden de la Corona fueron severamente prohibidas las doctrinas de Descartes que todavía estaban demasiado candentes para que el pueblo las descubriera. Comentando la vuelta de los restos de Descartes a su nativa Francia, Jacobi hizo notar que "muchas veces es más conveniente poseer las cenizas de los grandes hombres que albergar a esos hombres durante su vida".
Poco después de su muerte, los libros de Descartes fueron incluidos; en el Index de la Iglesia, aunque, obedeciendo la sugestión del Cardenal Richelieu, había permitido su publicación durante la vida del autor. "No hay mucha consecuencia en estos actos." Pero a los fieles poco les importa la consecuencia, el coco de las mentes estrechas y el veneno de los inconsecuentes fanáticos.

No nos ocuparemos aquí de la contribución monumental que Descartes hizo a la filosofía, ni tampoco podemos detenernos en su brillante intervención en la aurora del método experimental. Todo esto cae fuera del campo de la Matemática pura, en la que quizá se encuentra su obra máxima. A pocos hombres les es dado renovar todo un campo del pensamiento humano; Descartes fue uno de ellos. Describiremos brevemente la más brillante de sus grandes contribuciones, omitiendo todas las muchas y bellas cosas que realizó en Álgebra y particularmente en la notación algebraica y la teoría de ecuaciones. Se trata de algo de orden más elevado, que se caracteriza por la amable simplicidad que tienen esa media docena de las más grandes contribuciones que se han hecho a la Matemática. Descartes rehizo la Geometría e hizo posible la Geometría moderna.
La idea básica; como la de todas las grandes cosas en Matemática, es muy simple y obvia. Si se trazan sobre un plano dos rectas que se cortan, podremos aceptar que las líneas forman ángulos rectos u otro tipo cualquiera de ángulos. Imaginemos ahora una ciudad construida siguiendo el plan americano, cuyas avenidas marchan de Norte a Sur y las calles de Este a Oeste. Todo el plan queda trazado con respecto a una avenida y a una calle llamadas ejes, que se cortan en lo que se denomina el origen, desde el cual se numeran consecutivamente calles y avenidas. Así se aprecia claramente, sin necesidad de un esquema, dónde se halla la calle 126: 1002 al Oeste teniendo en cuenta que 10 avenidas suman el número 1002, y luego hay que dirigirse hacia el *Oeste*, es decir, sobre el mapa a la izquierda del origen. Esto nos es tan familiar que nos es fácil fijar instantáneamente la posición de cualquier dirección. El número d e las avenidas y el número de las calles con los necesarios suplementos de números más pequeños (como el "2" el "1002") nos capacita para establecer definitiva e inequívocamente la posición de cualquier punto con respecto a los *ejes*, pues se conoce el par de números que miden su *Este-Oeste* y su *Norte-Sur* desde los ejes.

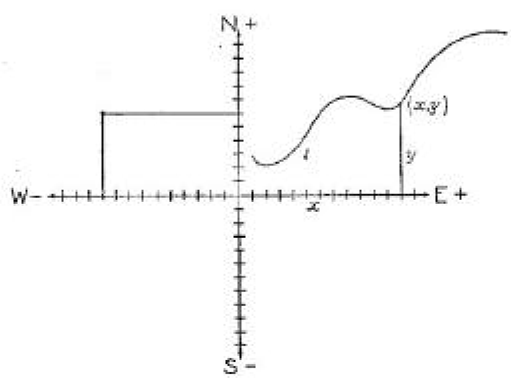


Figura 3.1

Este par de números se llama las *coordenadas* del punto (con respecto a los ejes).
Supongamos ahora un punto que se mueve sobre el mapa. Las *coordenadas* (x, y) de *todos* los puntos en la curva sobre la cual se mueve estarán ligadas por una ecuación (esto debe ser aceptado por el lector que jamás ha trazado un gráfico), que se llama la *ecuación de la curva.*
Supongamos ahora para simplicidad que nuestra curva es una circunferencia. Tenemos su ecuación. ¿Qué podemos hacer con ella? En lugar de esta particular ecuación, podemos escribir una más general del mismo tipo (por ejemplo, la de segundo grado cuyos coeficientes de las variables multiplicados entre sí den el término independiente y luego proceder a tratar esta ecuación algebraicamente. Finalmente referiremos los resultados de todas nuestras

manipulaciones algebraicas en sus equivalentes en función de las coordenadas de puntos en el diagrama, que todo este tiempo habíamos olvidado deliberadamente. El Álgebra es más fácil de ver así que una tela de arana de líneas en la forma griega de la Geometría elemental. Lo que hemos hecho *es utilizar nuestra Álgebra para el descubrimiento e investigación de teoremas geométricos referentes a circunferencias.*

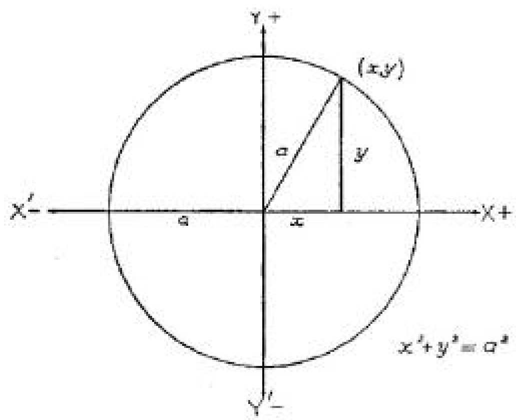


Figura 3.2

Para líneas rectas y circunferencias esto parece no ser muy necesario, pues ya sabemos cómo resolverlo de otra forma, según el método griego. Pero, ahora, llegamos al verdadero poder del método. Partimos *de ecuaciones de cualquier grado deseado o sugerido de complejidad e interpretamos sus propiedades algebraicas y analíticas geométricamente.* Por tanto, hemos renunciado a que la Geometría sea nuestro piloto; le hemos atado un saco de ladrillos a su cuello antes de lanzarla por la borda. *El Álgebra y el Análisis serán nuestros pilotos en los mares desconocidos "espacio" y su "geometría".* Todo lo que hemos dicho puede extenderse a un espacio de cualquier número de dimensiones; para el plano necesitamos dos coordenadas, para el espacio "sólido" ordinario tres; para la Geometría de la mecánica y la relatividad, cuatro; y, finalmente, para el espacio, como los matemáticos lo imaginan, *n* coordenadas, o tantas coordenadas como son *todos* los números 1, 2, 3,... o tantas como existen en *todos* los puntos de una línea. Esto es batir a Aquiles y a la tortuga en su carrera.

Descartes no revisó la Geometría; la creó. Parece lógico que sea un eminente compatriota de Descartes el que diga la última palabra, y por ello citaremos las de Jacques Hadamard. Dicho autor hace notar primeramente que la simple invención de las coordenadas no es el mayor mérito de Descartes, debido a que ya había sido hecha "por los antiguos": un juicio que únicamente es exacto si nosotros consideramos la intención no expresada como un hecho no cumplido . El infierno está empedrado con las ideas semicocidas de los "antiguos", que jamás las podrían haber cocido en su propio horno.

"Es una cosa completamente diferente considerar (como en el uso de las coordenadas) un método general y seguir hasta el fin la idea que representa. Es exactamente este mérito, cuya importancia todos los matemáticos conocen, el que hay que atribuir a la Geometría de Descartes. Es así como llegó a lo que... es un verdadero gran descubrimiento en la materia: la aplicación del método de las coordenadas, no sólo para hacer la transformación de ecuaciones de las curvas ya definidas geométricamente, sino contemplando la cuestión desde un punto de vista exactamente opuesto, para una definición a priori de curvas cada vez más complicadas y, por tanto, más y más general. "Directamente, con Descartes mismo, más tarde indirectamente, al volver en el siguiente siglo en dirección opuesta, se ha revolucionado, todo el concepto del objeto de la ciencia matemática. Descartes comprendió la significación de lo que había hecho y con razón decía, cuando quería alardear, que había superado la Geometría anterior a él en el mismo grado que la retórica de Cicerón superó el ABC."

Capítulo Cuarto
El Príncipe de los Aficionados

FERMAT

He encontrado gran número de teoremas extraordinariamente bellos.
P. Fermat

No todos nuestros patos pueden ser cisnes; así, después de haber mostrado a Descartes como uno de los grandes matemáticos de todas las épocas, debemos justificar la afirmación, frecuentemente hecha y rara vez discutida, de que el más grande matemático del siglo XVII fue el contemporáneo de Descartes, Fermat (1601? 1665). Como es natural, dejamos aparte a Newton (1642 1727). Puede afirmarse que Fermat fue al menos igual a Newton como matemático puro, pero, de todos modos, casi un tercio de la vida de Newton corresponde al siglo XVIII, mientras que toda la vida de Fermat se desenvolvió en el siglo XVII.
Newton parece haber considerado su Matemática como un instrumento para la exploración científica, y puso su mayor esfuerzo en esta última. Fermat, en cambio, era más atraído por la Matemática pura, aunque también hizo notables trabajos en las aplicaciones de la Matemática a la ciencia, particularmente a la óptica. La Matemática entró en su fase moderna con la publicación de Descartes de la Geometría analítica en 1637 y fue aún durante muchos años de tan modesto desarrollo que un hombre de talento podía esperar hacer grandes cosas tanto en la forma pura como en la forma aplicada.
Como matemático puro, Newton alcanzó su culminación con la invención del Cálculo infinitesimal, que también se debe, independientemente, a Leibniz. Más adelante nos detendremos sobre estas cuestiones, pero ahora haremos notar que Fermat concibió y aplicó la idea directriz del Cálculo diferencial trece años antes de que naciera Newton y diecisiete antes de que naciera Leibniz, aunque no llegó a reducir, como hizo Leibniz, su método a una serie de reglas comunes, que hasta un bobo puede aplicar a fáciles problemas.
Del mismo modo, Descartes y Fermat inventaron la Geometría analítica independientemente uno de otro. La mayor parte del esfuerzo de Descartes corresponde a la investigación científica del

tipo más variado, a la elaboración de su filosofía y a su disparatada "teoría de los torbellinos" del sistema solar, que aun en Inglaterra fue durante largo tiempo una seria rival de la más bella, más sencilla y no metafísica teoría newtoniana de la gravitación universal. Parece que Fermat jamás fue tentado, como Descartes y Pascal, a filosofar, por una engañosa seducción acerca de Dios, del hombre y del Universo como un todo; así, después de haber realizado su labor en el Cálculo y la Geometría analítica y de haber vivido una vida serena, de arduo trabajo, con el que ganó lo necesario para su vida, tuvo tiempo para dedicar el resto de sus energías a su distracción favorita, la Matemática pura, y cumplir su más grande obra, la fundación de la teoría de números, sobre la cual reposa indiscutido y única su inmortalidad.

Recordaremos también que Fermat participó con Pascal en la creación de la teoría matemática de la probabilidad. Si todas estas adquisiciones de primera categoría no son suficiente para ponerle a la cabeza de sus contemporáneos en la Matemática pura, podemos preguntarnos: ¿quién hizo más? Fermat era creador ingénitamente. Era
también, en el estricto sentido de la palabra, en lo que se refiere a su ciencia de la matemática, un aficionado. Sin duda es uno de los más grandes aficionados en la historia de la ciencia, y quizá "Sea el primero". La vida de Fermat fue tranquila y laboriosa, pues tuvo una extraordinaria suerte. Los hechos esenciales de su pacífica carrera pueden ser rápidamente referidos. Hijo del comerciante en pieles Dominique Fermat, segundo cónsul de Beaumont, y Claire de Long, hija de una familia de juristas parlamentarios, el matemático Pierre Fermat nació en Beaumont de Lomagne, Francia, en el mes de agosto de 1601 (la fecha exacta es desconocida, el día del bautismo fue el 20 de agosto). Su primera educación la recibió en el hogar, en su ciudad nativa; sus estudios posteriores para la preparación a la magistratura fueron continuados en Toulouse. Como Fermat vivió tranquilo y reposadamente, evitando las disputas sin provecho, y como no tuvo una cariñosa hermana como Gilberte, la hermana de Pascal, que recordara sus prodigios de adolescente para la posteridad, poco es lo que se sabe de sus años de estudio. Deben haber sido brillantes, pues los descubrimientos de su madurez dan prueba de ello. Ningún hombre sin un sólido fundamento en sus estudios previos pudo haber sido el conocedor de los clásicos y el notable literato que Fermat fue. Su maravillosa obra en la teoría de números y en la Matemática en general no puede ser referida a la Instrucción que recibió, pues los campos donde hizo su máximo descubrimiento no estaban abiertos cuando era estudiante.

Los únicos acontecimientos dignos de mención en su vida privada son su instalación en Toulouse, a la edad de 30 años (14 de mayo de 1631, como magistrado); su matrimonio el 1° de junio del mismo año, con Louise de Long, prima de su madre, que le dio tres hijos, uno de ellos, Clément Samuel, que llegó a ser el albacea científico de su padre, y dos hermanas que fueron monjas; su ascenso en 1648 a la Conserjería Real en el Parlamento local de Toulouse, cargo que desempeñó con dignidad y gran talento durante 17 años; toda la obra de su vida, durante 34 años, dedicada al fiel servicio del Estado, y, finalmente, su muerte en Castres, el 12 de enero de 1665, a los 65 años. ¿"Historia"? Fermat podía haber dicho: "Os bendigo señor, no tengo ninguna". Y con esta tranquila, honesta y escrupulosa vida, a este hombre corresponde una de las más preclaras historias en la historia de la Matemática.

Su historia es su obra, su recreo más bien, dado el gran amor que tuvo por ella, y lo mejor es su simplicidad, que permite a cualquier escolar de una inteligencia normal comprender su naturaleza y apreciar su belleza. La obra de este príncipe de los aficionados matemáticos ha ejercido una irresistible atracción para los aficionados a la Matemática en todos los países civilizados, durante los últimos tres siglos. Esta obra, la teoría de números, como se llama, es probablemente un campo de la Matemática donde cualquier aficionado de talento puede aún esperar el hallazgo de algo interesante. Echaremos una ojeada sobre sus otras contribuciones, después de mencionar de

pasada su "erudición singular" en lo que muchos llaman humanidades. Sus conocimientos de las principales lenguas europeas y de la literatura de la Europa continental eran muy grandes y completos, y la filología griega y latina le son deudoras de diversas e importantes correcciones. En la composición de versos latinos, franceses y españoles, una de las tareas galantes de su época, mostró gran habilidad y fino gusto. Podemos comprender su vida tranquila pensando que se trataba de un hombre afable sin crítica aguda ni violenta (como Newton en sus últimos días) y sin orgullo aunque con cierta vanidad, que Descartes, su opuesto en todos los respectos, caracterizaba diciendo: "Mr. de Fermat es un gascón; yo no lo soy". La alusión a los gascones puede, posiblemente, referirse a cierto tipo amable de fanfarronería que algunos escritores franceses. (por ejemplo, Rostand, en *Cyrano de Bergerac*, acto II, escena 7), atribuyen a los hombres de Gascuña. Puede ser que se encuentre este tipo de fanfarronería en las cartas de Fermat, pero siempre sencillas, e inofensivas. En cuanto a Descartes, hay que reconocer que no era exactamente un juez imparcial. En efecto, recordaremos que su tozudez, propia del soldado, fue la causa de que ocupara un mal segundo puesto en su prolongada lucha con el "gascón" acerca de un problema de extraordinaria importancia, el problema de las tangentes.
Considerando la naturaleza de, los deberes oficiales de Fermat y la importancia de los hallazgos de Matemática que realizó, algunos se asombran de cómo pudo encontrar tiempo para todo. Un crítico francés sugiere una probable solución: que el trabajo de Fermat como consejero del Rey fue una ayuda más que un obstáculo a sus actividades intelectuales. A diferencia de otros empleados públicos, los consejeros parlamentarios debían mantenerse apartados de sus conciudadanos y abstenerse de actividades sociales innecesarias que podían dar lugar a corrupciones y soborno en las actividades de su oficio. Así Fermat dispuso de gran cantidad de horas para dedicarse a sus trabajos.
Nos ocuparemos ahora brevemente, del papel desempeñado por Fermat en la evolución del Cálculo. Como hemos hecho notar en el capítulo sobre Arquímedes, un equivalente geométrico del problema fundamental del Cálculo diferencial es trazar la tangente a un arco continuo de una curva en un punto dado cualquiera.
Brevemente puede definirse el "continuo" como "uniforme, sin, rotura o repentinos saltos", y dar una definición matemática exacta requeriría numerosas páginas de definiciones y sutiles distinciones que seguramente dejarían asombrados a los inventores del Cálculo, incluyendo a Newton y Leibniz. Y también puede sospecharse que si todas esas sutilezas, que los modernos estudiosos exigen, se hubieran presentado a los inventores, el Cálculo jamás habría sido inventado.

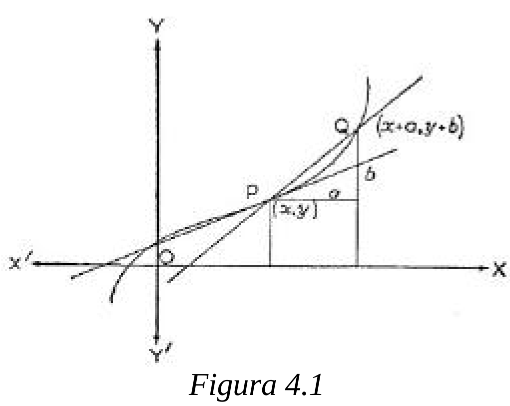


Figura 4.1

Los creadores del Cálculo, incluso Fermat, confiaban en la intuición geométrica y física (en su mayor parte cinemática y dinámica) para marchar adelante: Expresaban lo que pasaba por sus imaginaciones para hacer la *gráfica* de una "curva continua" mediante el proceso de trazar una línea recta, tangente a la curva, en cualquier punto P en la curva, y tomando otro punto Q también en la curva y trazar la línea recta PQ para unir P *y* Q. Luego, con la imaginación, dejar que el punto Q se mueva a lo largo del arco de la curva desde Q a P, hasta que Q coincida con P, cuando la cuerda PQ en la *posición límite*, justamente descrita, venga a ser la tangente *PP* a la curva en el punto P, que es lo que estamos considerando.

El siguiente paso fue trasladar esto al lenguaje algebraico o analítico. Conociendo las coordenadas x, y del punto P en la gráfica, y las $x + a, y + b$, de Q antes de que Q se haya movido hasta coincidir con P, basta examinar la gráfica para ver que la inclinación de la cuerda PQ es igual a b/a: evidentemente una medida de la "pendiente" de la curva con relación al eje de las x (la línea a lo largo de la cual se miden las distancias x); esta "pendiente" es, precisamente, lo que se entiende por inclinación.

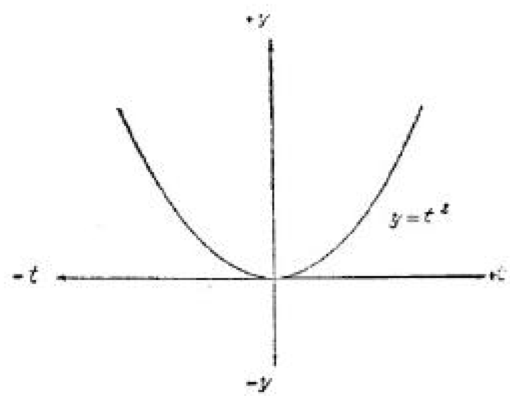


Figura 4.2

Es, pues, evidente que la *inclinación requerida de la tangente en P* (después que Q se haya movido hasta coincidir con P) será el valor límite de b/a, cuanto, tanto b como a, se aproximan simultáneamente al valor cero; para $x + a, y + b$, las coordenadas de Q, serán en último término x, y, las coordenadas de P. Este valor límite es la inclinación pedida. Teniendo la inclinación y el punto P puede trazarse ahora la tangente.

Este no es exactamente el proceso de Fermat para trazar tangentes, pero su método es muy semejante al que acabamos de explicar.

¿Por qué es digno todo esto de que cualquier hombre racional o práctico le preste seria atención? Se trata de una larga historia, y sólo haremos aquí una ligera mención, reservándonos ampliarla al hablar de Newton. Una de las ideas fundamentales en dinámica es la de velocidad de una partícula en movimiento. Si establecemos en una gráfica el número de unidades de longitud que recorre la partícula en una unidad de tiempo frente al número de unidad de tiempo, trazaremos una línea, recta o curva, que describa simplemente el movimiento, de la partícula y la pendiente de esta línea en un punto dado de ella, tendremos la *velocidad* de la partícula en el instante correspondiente al punto; mientras más rápidamente se mueva la partícula, tanto más escarpada será la inclinación de la línea tangente. Esta inclinación debe, en efecto, medir la velocidad de la partícula en cualquier punto de su camino. El problema del movimiento, cuando se lleva a la *Geometría*, es el de hallar la inclinación de la línea tangente en un punto determinado de una curva. Existen problemas similares que están en relación con los *planos tangentes* a las

superficies (que también tiene importantes interpretaciones en la mecánica y en la física matemática) y todos ellos deben ser tratados por el Cálculo diferencial, cuyo problema fundamental hemos intentado describir, tal como se presentó a Fermat y sus sucesores.
De lo ya dicho puede deducirse otro uso de este Cálculo. Suponga que cierta cantidad y es una "función" de otra, t, y se expresa $y = f(t)$, lo que significa que cuando cualquier número dado, por ejemplo 10, sustituye a t, es $f(10)$ "función f de 10" podemos deducir, de la *expresión algebraica de f* dada, el valor correspondiente de y, o sea $y = f(10)$. Para ser explícitos supongamos que $f(t)$ es esa particular "función" de t que se expresa en Álgebra por t^2, o $t*t$. Entonces, cuando $t = 10$, tendremos $y = f(10)$, y, por tanto, $y = 10^2 = 100$, para este valor de t; cuando $t = 1/2$, $y = 1/4$ así sucesivamente, para cualquier valor de t.
Todo esto es familiar para quien haya recibido su educación media en una época que no se remonte a más de 30 ó 40 años, pero algunos pueden haber olvidado lo que estudiaron en Aritmética siendo niños, lo mismo que otros no pueden declinar el latín "mensa" para salvar sus almas. Pero incluso el más olvidadizo verá que podemos hacer una gráfica de $y = f(t)$ para cualquier forma particular de f (cuando $f(t)$ es t^2, la gráfica es una parábola parecida a un arco invertido. Imaginemos la gráfica trazada. Si se hallan en ésta el punto *máximo* o el *mínimo*, el punto más superior o el más inferior que los que se hallan en sus *inmediatas proximidades,* observaremos que la tangente en cada uno de estos *máximos* o *mínimos* es paralela al eje t. Es decir, *la inclinación* de la tangente en tal *extremo* (máximo o mínimo) de *f (t) es cero.*
Así, si estamos buscando el extremo de una función determinada $f(t)$, debemos resolver también nuestro problema de inclinación para la curva particular $y = f(t)$, y habiendo encontrando la inclinación para el punto general t, y, igualar a cero la expresión algebraica de esta inclinación para encontrar los valores de t correspondientes al *extremo*. Esto es, sustancialmente, lo que Fermat hizo con su método de máximos y mínimos inventado en 1628 - 29, aunque no fue hecho semipúblico hasta 10 años más tarde, cuando Fermat envió su exposición a Descartes a través de Mersenne.

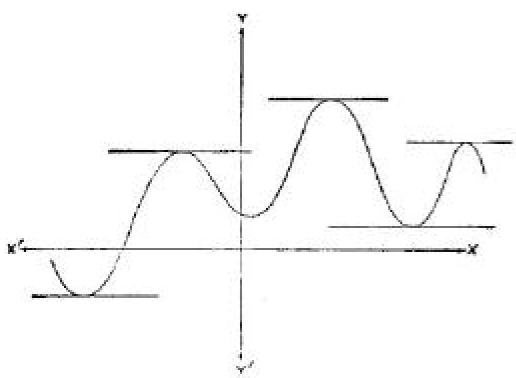


Figura 4.3

Las aplicaciones científicas de estas simples ideas, convenientemente elaboradas, para explicar problemas mucho más complicados que el antes descrito, son numerosas y de gran alcance. En mecánica, por ejemplo, como Lagrange descubrió, existe una cierta función de las posiciones (coordenadas) y velocidades de los cuerpos referentes a un problema, el cual, llevado a un "extremo" nos proporciona las "ecuaciones de movimiento" del sistema considerado, y éstas, a su vez, nos capacitan para determinar el movimiento, para describirlo completamente, en cualquier instante dado. En Física existen muchas funciones similares, cada una de las cuales resume la mayor parte de una extensa rama de la Física matemática con la simple exigencia de que la función en cuestión debe tener un "extremo". Hilbert, en 1916, encontró una para la relatividad general. Fermat no perdió, pues, su tiempo cuando empleó las horas de ocio que le dejaban sus trabajos, legales abordando los problemas de máximos y mínimos. Hizo una bella y asombrosa aplicación de sus principios a la óptica. De pasada puede notarse que este descubrimiento ha sido el germen de la reciente teoría de los quanta en su aspecto matemático, el de la "mecánica ondulatoria" propuesta en el año 1926. Fermat descubrió lo que de ordinario se denomina "el principio del tiempo mínimo", aunque sería más exacto decir "extremo" (mínimo o máximo) en lugar de "mínimo"'.

Según este principio, si un rayo de luz pasa desde un punto A a otro punto B reflejándose y refractándose (refracción significa el cambio de dirección al pasar desde el aire al agua o a través de una gelatina de densidad variable) durante su paso, el camino que sigue puede ser calculado (todos los quiebros y desviaciones debidos a la refracción y todas sus vueltas debidas a la reflexión) gracias a la *simple* exigencia de que el tiempo empleado para pasar desde A a B será un "extremo". [1]

De este principio Fermat dedujo las conocidas leyes de la reflexión y de la refracción: el ángulo de incidencia (en la reflexión) es igual al ángulo de reflexión; el seno del ángulo de incidencia (en la refracción) es una constante igual al número de veces el seno del ángulo de refracción al pasar desde un medio a otro.

La cuestión de la Geometría analítica ya ha sido mencionada; Fermat fue el primero que la aplicó al espacio de tres dimensiones. Descartes se contentó con dos dimensiones. La extensión, familiar a todos los estudiantes actuales, ya no aparece evidente por sí misma, incluso para un hombre de talento, desde los desarrollos de Descartes. Puede decirse que existe de ordinario mayor dificultad para encontrar una extensión significativa de un tipo particular de Geometría desde el espacio de dos dimensiones al de tres, que las que existen al pasar desde tres a cuatro o cinco... o *n* dimensiones. Fermat corrigió a Descartes en un punto esencial (el de la clasificación de las curvas por sus grados). Parece, pues, natural que el agrio Descartes luchara contra el imperturbable "gascón" Fermat. El soldado era muchas veces irritable y áspero en sus controversias sobre el método de las tangentes de Fermat, y el equilibrado jurista siempre se manifestaba serenamente cortés. Como ocurre de ordinario, el hombre que mantiene la calma encuentra mejores argumentos. Pero Fermat obtuvo la victoria no porque fuera un polemista más hábil, sino porque tenia razón.

De pasada diremos que Newton tuvo que haber oído hablar del empleo del Cálculo hecho por Fermat. Hasta el año 1934 no había sido publicada ninguna prueba de que así haya ocurrido, pero en ese año el profesor L. T. More recuerda en su bibliografía de Newton una carta, hasta entonces desconocida, en la que Newton dice explícitamente que el método de Fermat de trazar tangentes le sugirió el método del Cálculo diferencial.

Volvamos ahora a la máxima obra de Fermat, inteligible a todos los matemáticos y aficionados, la llamada "teoría de números", o "Aritmética superior", o finalmente, para usar el nombre sencillo que era suficiente para Gauss, Aritmética.

Los griegos separaron todo lo que hoy reunimos en los textos elementales bajo el nombre de Aritmética en dos diferentes secciones, *Logística* y *Aritmética*; la primera se refiere a las

[1] Este juicio es suficientemente exacto para la exposición presente. En realidad, lo que se requiere son los valores de las variables (coordenadas y velocidades) que hacen la función en cuestión *estacionaria* (que no aumenta ni disminuye). Un extremo es *estacionario*; pero un *estacionario* no es necesariamente un extremo.

aplicaciones prácticas para el comercio y la vida diaria general; la segunda, la Aritmética, en el sentido de Fermat y de Gauss, intenta descubrir las propiedades de los números como tales.
La Aritmética en sus esenciales y, probablemente, más difíciles problemas, investiga las relaciones mutuas de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5,... que nosotros enumeramos casi tan pronto como aprendemos a hablar. Al esforzarse por dilucidar estas razones, los matemáticos han sido llevados a la invención de sus sutiles y abstrusas teorías, cuyas selvas de problemas técnicos oscurece los problemas iniciales, los que se refieren a 1, 2, 3, 4, 5,... con la real justificación de que así se encuentra la solución de estos problemas. Mientras tanto los resultados secundarios de esas investigaciones al parecer inútiles recompensan ampliamente a quienes emprendieron la tarea de encontrar numerosos métodos útiles aplicables a otros campos de la Matemática que tiene contacto directo con el universo físico. Para mencionar un ejemplo, la última fase del Álgebra, que en la actualidad es cultivada por los algebristas y que lanza una luz completamente nueva sobre la teoría de ecuaciones algebraicas, encuentra origen directo en los ensayos de Fermat para establecer el simple último teorema (que será, expuesto cuando hayamos preparado el camino).
Comenzamos con un famoso juicio que Fermat hizo acerca de los números primos. Un número natural primo o, brevemente, un número primo es cualquier número mayor que 1 que tiene como divisores exactos (sin dejar resto) únicamente 1 y al mismo número. Por ejemplo, 2, 3, 5, 7, 13, 17 son primos, y también los son 257, 65, 537. Pero, 4294967297 no es primo, porque admite el divisor 641, ni tampoco lo es el número 18446744073709551617, que es exactamente divisible por 274177; ambos números 641 y 274177 son primos. Cuando en Aritmética decimos que un número tiene como divisor otro número, o es divisible por otro, queremos decir que es *exactamente divisible* (el resto es cero). Así 14 es divisible por 7; 15 no lo es. Los dos números grandes que hemos mencionado antes premeditadamente deben esa mención a una razón que rápidamente encontraremos. Recordaremos además otra definición: la potencia **n**-ésima de un número, por ejemplo N, es el resultado de multiplicar n veces N y se escribe N^n ; así $5^2 = 5 * 5 = 25$; $8^4 = 8 * 8 * 8 * 8 = 4.096$. Por razones de uniformidad N se puede escribir N^1 [potencia primera].
Por otra parte, una "pagoda" como $((2)^3)^5$ significa que primero debemos calcular $3^5 = 243$, y entonces "elevar" 2 a esta potencia, 2^{243}; el número resultante tiene 74 cifras.
El siguiente punto es de gran importancia en la vida de Fermat y también en la historia de la Matemática. Consideremos los números 3, 5, 17, 257, 65537. Todos ellos pertenecen a una "sucesión" de un tipo especial debido a que todos están engendrados (con 1 y 2), por el mismo simple proceso que aquí puede verse:

$$3 = 2 + 1; 5 = 2^2 + 1; 17 = 2^4 + 1; 257 = 2^8 + 1; 65537 = 2^{16} + 1;$$

y si tenemos el cuidado de comprobar el cálculo podemos fácilmente ver que los dos grandes números mencionados antes son $2^{32} + 1$ y $2^{64} + 1$, también números de la sucesión. Tenemos así siete números pertenecientes a esta sucesión; y los cinco *primeros de estos números son primos, mientras los dos últimos no lo son.*
Observando cómo se compone la sucesión, notaremos que los "exponentes" (los números escritos superiormente que indican a qué potencia se eleva 2) son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, y veremos que son 1 (que se puede escribir 2^0, como en Álgebra, si queremos hacerlo por uniformidad), 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6. Efectivamente, nuestra sucesión es $((2)^2)^n + 1$ donde n toma los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. No es preciso detenerse en $n = 6$; cuando $n = 7, 8, 9...$, podemos continuar indefinidamente la sucesión obteniendo números cada vez más enormes.

Supongamos ahora que deseamos descubrir si un determinado número de esa sucesión es primo. Aunque existan muchos cálculos abreviados, y numerosos divisores de ensayo puedan ser rechazados por inspección, y aunque la moderna Aritmética limita los tipos de divisores de ensayo que es necesario someter a prueba, nuestro problema requiere la misma laboriosidad que requeriría dividir el número dado por los primos 2, 3, 5, 7.... que son menores que la raíz cuadrada entera del número. Si ninguno de ellos divide exactamente al número, éste será primo. No es necesario decir que el trabajo que significa ese ensayo, aunque se utilicen las formas abreviadas conocidas, es prohibitivo, incluso para valores de *n* tan pequeños como 100. (El lector puede asegurarse por sí mismo de esto intentando estudiar el caso $n = 8$).

Fermat afirmó que estaba convencido de que *todos los números de la sucesión son primos*. Los números mencionados (correspondientes a $n = 5, 6$) le contradicen, según hemos visto. Éste es el punto de interés histórico que nosotros deseamos mostrar: Fermat hizo erróneas conjeturas, *pero* jamás pretendió haber *probado* su conjetura. Algunos años más tarde emitió un confuso juicio, referente a lo que él había hecho, del que algunos críticos infieren que se había engañado. La importancia de este hecho se verá más adelante.

Como una curiosidad psicológica podemos mencionar que Zerah Colburn, el muchacho calculador americano a quien se preguntó si el sexto número de Fermat (4294967297) era o no primo, replicó, después de un breve cálculo mental, que no lo era, y que tenía por divisor 641. Fue incapaz de explicar el proceso en virtud del cual había llegado a esta conclusión correcta. Más tarde volveremos a ocuparnos de Colburn (en relación con Hamilton).

Antes de terminar con los "números de Fermat" $((2)^2)^n + 1$, volveremos la mirada hacia el siglo XVIII, época en que estos misteriosos números fueron en parte responsables de uno de los dos o tres acontecimientos más importantes en toda la larga historia de la Matemática. Por algún tiempo, un muchacho de 18 años había dudado, según la tradición, si dedicaría su soberbio talento a la Matemática 0 a la Filología. Tenía igual aptitud para ambas. Lo que le decidió fue un bello descubrimiento en relación con un simple problema de Geometría elemental, que es familiar a todos los escolares.

Un polígono *regular* de *n* lados tiene todos sus *n* lados iguales y todos sus *n* ángulos también iguales. Los antiguos griegos encontraron pronto la manera de construir polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 10, y 15 lados, por el uso, tan sólo, de la regla y el compás, y es fácil, con los mismos instrumentos, construir partiendo de un polígono regular que tenga un número determinado de lados otro polígono regular que tenga doble número de lados. El paso siguiente fue construir con eso mismos instrumentos polígonos regulares de 7, 9, 11, 13,... lados. Muchos buscaron el método, pero no llegaron a encontrarlo, debido a que tales construcciones son imposibles, aunque no lo sabían. Después de un intervalo de más de 2200 años, el muchacho que dudaba entre las Matemática y la Filología dio el siguiente paso hacia adelante.

Como ya se ha indicado, es suficiente considerar tan sólo polígonos que tengan un número impar de lados. El muchacho demostró que la construcción con regla y compás de un polígono regular que tenga un número impar de lados tan sólo es posible cuando el número es o bien un número primo de Fermat (es decir, un primo de la forma $((2)^2)^n + 1$), o se obtiene multiplicando entre sí diferentes primos de Fermat. Por tanto, la construcción es posible para 3, 5, ó 15 lados como los griegos sabían, pero no para 7, 9, 11, ó 13 lados, y es también posible para 17, ó 257 ó 65537 o para el primo siguiente en la sucesión de Fermat 3, 5, 17, 257, 65537, ... *si existe*, si bien nadie lo conoce todavía (1936), y la construcción es también posible para 3* 17 ó 5 *257 * 65537 lados, y así sucesivamente. Este descubrimiento, anunciado el 1° de junio de 1796, aunque hecho el 30 de marzo, fue el que indujo al muchacho a elegir la Matemática en lugar de la Filología como la obra de su vida. Su nombre era Gauss.

Un descubrimiento de otro tipo que Fermat hizo respecto a los números es el llamado "Teorema de Fermat" (*no* su "último teorema"). Si n es cualquier número entero y p cualquier primo, entonces, $n^p - n$ es divisible por p. Por ejemplo, tomando $p = 3$ y $n = 5$, tendremos $5^3 - 5$, ó 125-5, que es 120, o también 3 * 40; para $n = 2$, $p = 11$, tendremos $2^{11} - 2$, o sea 2048 - 2, que es 2046 = 11*186.

Es difícil o quizá imposible saber por qué algunos teoremas en Aritmética se consideran "importantes", mientras otros igualmente difíciles de probar son considerados triviales. Un criterio, aunque no necesariamente concluyente, es que el teorema pueda usarse en otros campos de la Matemática. Otro criterio es el de que sugiera investigaciones en Aritmética o en Matemática en general, y un tercer criterio es que en algún respecto sea universal. El teorema de Fermat justamente satisface todas esas algo arbitrarias exigencias: es de uso indispensable en muchas partes de la Matemática, incluyendo la teoría de grupos (véase capítulo XV) que, a su vez, es la raíz de la teoría de ecuaciones algebraicas; ha sugerido muchas investigaciones, entre las cuales puede mencionarse como un ejemplo importante todo el estudio de las raíces primitivas; finalmente, es universal, en el sentido, de que juzga una propiedad de todos los números primos, esas propiedades generales son extremadamente difíciles de encontrar y se conocen muy pocos casos.

Como de ordinario en él, Fermat expuso su teorema $n^p - n$ sin prueba. La primera fue dada por Leibniz en un manuscrito sin fecha, pero parece que descubrió la demostración antes de 1683. El lector puede igualmente ensayar su capacidad intentando obtener una prueba. Todo lo necesario se reduce a los siguientes datos, que pueden ser probados o supuestos para ese fin: Un número entero determinado puede ser construido tan sólo de un modo, aparte de las alteraciones de los factores, multiplicando números primos; si un primo divide al producto (resultante de la multiplicación) de dos números enteros, dividirá al menos uno de ellos. Por ejemplo: 24 = 2 * 2 * 2 * 3, y 24 no puede ser obtenido por la multiplicación de primos en ninguna, forma esencialmente diferente: por ejemplo,

2 * 2 * 2 * 3
2 * 2 *3 * 2
2 * 3 * 2 * 2
3 * 2 * 2 * 2

lo que es lo mismo;

7 divide a 42, y 42 igual 2 * 21 = 3 * 14 = 6 * 7

en cuyas operaciones 7 divide al menos uno de los números que se multiplican para obtener 42; del mismo modo, 98 es divisible por 7, y 98 = 7 * 14, en cuyo caso 7 divide tanto a 7 como a 14, y, por tanto, al menos uno de ellos. Partiendo de estos dos hechos puede obtenerse la prueba en menos de media página. Se halla dentro de la comprensión de cualquier muchacho normal de 14 años, pero se puede apostar que de un millón de seres humanos de inteligencia normal de cualquier edad, menos de 10, entre los que no han aprendido más Matemática que la Aritmética escolar, conseguirán encontrar una prueba dentro de un tiempo razonable es decir, un año.

Éste parece ser el lugar adecuado para citar algunas famosas observaciones de Gauss, que se refieren al campo favorito de los estudios de Fermat. La traducción al inglés se debe al aritmético irlandés H. J. S. Smith (1826 - 1863) correspondiente a la introducción de Gauss a los trabajos matemáticos de Eisenstein publicado en 1847.

"La Aritmética superior nos presenta una inagotable serie de verdades interesantes, de verdades que no están aisladas, sino que se encuentran en una íntima conexión interna, y entre las cuales, a medida que nuestro conocimiento aumenta, vamos descubriendo continuamente nuevos e inesperados vínculos. Una gran parte de estas teorías presenta, además, la peculiaridad de que proposiciones importantes que tienen el sello de la simplicidad son muchas veces fácilmente descubribles por inducción, y sin embargo, tienen un carácter tan profundo que no podemos encontrar su demostración hasta después de muchos ensayos, y aun entonces, cuando conseguimos triunfar, ha sido muchas veces mediante procesos penosos y artificiales, mientras los métodos más simples pueden permanecer gran tiempo ocultos."

Una de estas interesantes verdades que Gauss menciona es considerada por algunos como la más bella (pero no lo más importante) que Fermat ha descubierto acerca de los números: todo número primo de la forma $4n + 1$ es suma de dos cuadrados. Es fácil demostrar que ningún número de la forma $4n + 1$ es suma de dos cuadrados. Como todos los primos mayores que 2 corresponden a una u otra de estas formas, no hay nada que añadir. Por ejemplo, cuando 37 es dividido por 4 deja el resto 1, de modo que 37 debe ser la suma de dos cuadrados de números enteros. Por tanteos (existen otros caminos mejores) encontramos, en efecto, que $37 = 1 + 36 = 1^2 + 6^2$, y que no hay otros cuadrados x^2 e y^2 tales que $37 = x^2+ y2$. Para el primo 101 nosotros tenemos $1^2 + 10^2$; para 41 tenemos $4^2 + 5^2$. En cambio $19 = 4 * 5 - 1$, no es la suma de dos cuadrados.

Como en casi todos sus trabajos aritméticos, Fermat no dio la prueba de este teorema, que fue encontrada por el gran Euler en 1749 después de haber trabajado *siete años.* Pero Fermat describe el ingenioso método que inventó mediante el cual demuestra éste y algunos otros de sus maravillosos resultados. Se trata del llamado "descenso infinito", que es infinitamente más difícil de cumplir que la ascensión de Elías al cielo. Su exposición es concisa y clara, como veremos en una traducción libre al inglés de su carta del mes de agosto de 1659 a Carcavi.

"Durante largo tiempo he sido incapaz de aplicar mi método a las proposiciones afirmativas, debido a que las tretas que hay que emplear en ellas son mucho más difíciles que las que uso para las proposiciones negativas. Así, cuando debo probar que *todo* número primo que *supere* a un múltiplo *de 4* en *1 se compone de dos cuadrados,* me encontraba ante un tormento. Pero, al fin, una larga y repetida meditación me ha dado la luz que me faltaba, y ahora someto proposiciones afirmativas a mi método, con la ayuda de ciertos nuevos principios que necesariamente deben ser añadidos. El curso de mi razonamiento en las proposiciones afirmativas es éste: Si un primo arbitrariamente elegido de la forma $4n + 1$ no es suma de dos cuadrados, (pruebo que) existirá otro de la misma naturaleza, menor que el elegido, y (por tanto) un tercero aún menor, y así sucesivamente. Haciendo un "infinito descenso" de esta forma, llegamos finalmente al número 5, el menor de todos los números de este tipo ($4n$ + l). Por la prueba mencionada y el precedente argumento de ella, se deduce que 5 no es una suma de dos cuadrados. Pero como lo es, debemos inferir por *reductio ad absurdum* que todo los números de la forma $4n + 1$ son sumas de dos cuadrados».

Toda la dificultad para aplicar el "descenso" a nuevos problemas está en el primer paso, el de probar que si la proposición aceptada o supuesta es verdadera para cualquier número elegido al azar, será también verdadera para un número *más pequeño del mismo tipo.* No existe un método general aplicable a todos los problemas para dar ese paso.

Algo más raro que la paciencia del pordiosero o que la muy encarecida "infinita capacidad para sufrir dolores" es necesario para encontrar un camino a través del desierto. A quienes se imaginan genios, aunque no sean otra cosa que hábiles tenedores de libros, se les puede recomendar que desarrollen su infinita paciencia en el último teorema de Fermat.. Antes de exponer el teorema mencionaremos otro ejemplo de los problemas sagazmente simples que Fermat trató y resolvió. Llegamos ahora al tema del *Análisis diofántico* en que Fermat sobresalió. Cualquiera que sepa algo de números puede detenerse sobre el curioso hecho de que 27 = 25 + 2; la cuestión de interés aquí es que tanto 27 como 25 son potencias exactas, $27 = 3^3$ y $25 = 5^2$. Así observamos que $y^3 = x^2 + 2$ tiene una solución en números enteros *x, y*; la solución es y = 3, *x* = 5. Como una especie de prueba de superinteligencia el lector puede ahora demostrar que *y* = 3, *x* = 5, son los únicos números enteros que satisfacen la ecuación. No es fácil. En efecto, este juego aparentemente infantil requiere mayor innata capacidad intelectual que para comprender la teoría de la relatividad.

La ecuación $y^3 = x^2 + 2$ *con la limitación de qué la solución y, x debe ser en números enteros, es indeterminada* (debido a que hay dos incógnitas *x, y*, y una ecuación que las relaciona) o *diofántica*, porque fue el griego Diofanto uno de los primeros en insistir sobre las soluciones de ecuaciones en números *enteros*, o, con menos inflexibilidad, soluciones racionales (fraccionarias). No es difícil describir un infinito número de soluciones sin la restricción de los números enteros: así, podemos dar a *x* el valor que nos plazca, y entonces determinar *y*, añadiendo 2 a esta x^2 y extrayendo la raíz cúbica del resultado. Pero el problema *diofántico* de encontrar todas las soluciones con números enteros es otra cuestión diferente. La solución *y* = 3, *x* = 5, se aprecia "por inspección"; la dificultad del problema es probar que no existen otros números enteros *y, x* que satisfagan la ecuación. Fermat probó que no existe ninguno, pero, como de ordinario, suprimió su demostración, y todavía, después de muchos años de su muerte, no se ha encontrado.

Cuando Fermat afirmó tener una prueba, esa prueba fue más tarde encontrada. Y así ocurrió para todas sus afirmaciones positivas con la única excepción de la al parecer simple solución de su último teorema, que, los matemáticos se han esforzado por encontrar durante casi 300 años. Siempre que Fermat afirmó que había probado algo, luego se ha confirmado la exactitud, excepto para ese caso en que no ha sido encontrada la prueba. Su honradez escrupulosa y su penetración sin rival justifican que muchos, aunque no todos, acepten su afirmación de que poseía la demostración de su teorema.

Era costumbre de Fermat, al leer el Diophantus de Bachet, apuntar los resultados de sus meditaciones en breves notas marginales hechas en su ejemplar. El margen no era suficiente para escribir las demostraciones. Así, al comentar el octavo problema del segundo libro de la Aritmética de Diofanto, referente a la solución en números racionales (fracciones o números enteros) de la ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2 ,$$

Fermat hace el siguiente comentario:

"Por el contrario, es imposible descomponer un cubo en dos cubos, una cuarta potencia en dos cuartas potencias, o, de un modo general, cualquier potencia superior a la segunda en dos potencias del mismo grado. Yo he descubierto una demostración maravillosamente exacta (de este teorema general), pero este margen es demasiado estrecho para desarrollarlo" (Fermat, Oeuvres, III, pág. 241). Éste es su famoso último teorema, que descubrió hacia el año 1637. Traduciendo todo esto al lenguaje moderno, el problema de Diofanto es encontrar números enteros o fraccionarlos *x, y, a*, tales que $x^2 + y^2 = a^2$; Fermat asegura que no existen números enteros o fracciones tales que $x^3 + y^3 = a^3$ o $x^4 + y^4 = a^4$ o, de un modo general, que

$$x^n + y^n = a^n$$

si n es un número entero mayor que 2.
En el problema de Diofanto tiene una infinidad de soluciones; por ejemplo, $x = 3$, $y = 4$, $a = 5$; $x = 5$, $y = 12$, $a = 13$. Fermat mismo dio una prueba, mediante su método del "descenso infinito", de la imposibilidad de $x^4 + y^4 = a^4$. Desde entonces se ha demostrado que es imposible en números enteros (o fracciones) $x^n + y^n = 0$ para muchos números n (sobre todo para todos los primos[2] menores que $n = 14000$, si ninguno de los números x, y, a es divisible por n), pero esto no es lo que se pedía. Lo que se pide es que abarque *todos los n* mayores que 2. Fermat dijo que poseía una "maravillosa prueba".

Después de todo lo que se ha dicho, ¿es posible que se haya engañado? Un gran aritmético, Gauss, vota en contra de Fermat. Sin embargo, la zorra que no podía alcanzar las uvas afirmó que estaban verdes. Otros votaron a su favor. Fermat era un matemático de primera fila, un hombre de impecable honradez y un aritmético que no reconoce superior en la historia[3].

[2] El lector puede fácilmente ver que basta tratar el caso en que n sea un número impar, ya que en Álgebra $u^{ab} = (u^a)^b$ donde u, a, b son cualquier número.

[3] En 1903 el profesor alemán Paul Wolfskehl legó 100.000 marcos para premiar a la primera persona que diera una prueba *completa* del último teorema de Fermat. La inflación después de la primera guerra mundial, redujo este premio a una fracción de centavo.

Capítulo Quinto
"Grandeza y Miseria del Hombre"

PASCAL

Vemos... que la teoría de la probabilidad es en realidad únicamente el sentido común reducido a cálculo; nos hace apreciar con exactitud lo que las mentes razonadoras sienten por una especie de instinto, sin ser muchas veces capaces de explicarlo.. Es notable que [esta] ciencia, que nació al estudiar los juegos de azar, haya venido a constituir el objeto más importante del conocimiento humano.
Pierde Simon Laplace

Veintisiete años tenía Descartes cuando Blaise Pascal nació en Clermont, Auvernia, Francia, el 19 de junio de 1623, y éste sobrevivió a Descartes 12 años. Su padre Etienne Pascal, presidente de la Corte de Auvernia, en Clermont, era un hombre de cultura, considerado en su tiempo como un intelectual; su madre Antoinette Bégone murió cuando su hijo tenía cuatro años. Pascal tenía dos bellas e inteligentes hermanas, Gilberte, más tarde Madame Périer, y Jacqueline; ambas, especialmente la última, habían de desempeñar papeles importantes en su vida.

Blaise Pascal es más conocido para el lector general por sus dos obras literarias, los *Pensées* y las *Lettres écrites par Louis de Montalle à un provincial de ses amis,* y es habitual condensar su carrera matemática en algunos párrafos dentro del relato de sus prodigios religiosos. En este lugar, nuestro punto de vista debe necesariamente diferir, y consideraremos primeramente a Pascal como un matemático de gran talento, que por sus tendencias masoquistas de autotortura y especulaciones sin provecho sobre las controversias sectarias de su tiempo, cayó en lo que podemos llamar neurosis religiosa.

La faceta matemática de Pascal es quizá una de las más importantes de la historia. Tuvo la desgracia de preceder a Newton por sólo muy pocos años, y de ser contemporáneo de Descartes y Fermat, hombres más equilibrados que él. Su obra más original, la creación de la teoría matemática de probabilidades, se debe también a Fermat, quien pudo fácilmente haberla

formulado solo. En Geometría, en la cual es famoso como una especie de niño prodigio, la idea creadora fue proporcionada por un hombre, Desargues, de mucha menos celebridad.
En su esquema sobre la ciencia experimental, Pascal tuvo una visión mucho más clara que Descartes, desde el punto de vista moderno del método científico, pero le faltaba la exclusividad de objeto de Descartes, y aunque a él se deben estudios de primera categoría, se desvió de lo que pudiera haber hecho a causa de su morbosa pasión por las disquisiciones religiosas.
Es inútil especular sobre lo que Pascal podría haber hecho. Narraremos su vida tal como fue, y al considerarle como matemático diremos que hizo lo que estaba en él y que ningún hombre podría haber hecho más. Su vida es un constante comentario de dos de las historias, o símiles del Nuevo Testamento, que era su constante compañero y su infalible amparo: la parábola de los talentos y la observación acerca de que el vino nuevo rompe los odres viejos. Si hubo un hombre maravillosamente dotado que sepultara su talento, fue Pascal, y si hubo una mente medieval que se quebrara en su intento de mantener el nuevo vino de la ciencia del siglo XVII fue la de Pascal. Sus grandes dotes habrían sido concedidas por equivocación a la persona que Pascal fue.
A la edad de 7 años Pascal se trasladó con su padre y hermanas, desde Clermont a París. Por este tiempo el padre comenzó a enseñar a su hijo. Pascal era un niño extraordinariamente precoz. Tanto él como sus hermanas parece que han tenido un talento natural notable. Pero el pobre Blaise heredó (o adquirió) un miserable físico con una mente brillante, y Jacqueline, la más inteligente de sus hermanas, parece haber sido semejante a su hermano, pues cayó víctima de una morbosa religiosidad.
Al principio todas las cosas marchaban bien. El padre, asombrado de la facilidad con que su hijo absorbía la educación clásica de la época intentó mantener al muchacho en una relativa tranquilidad para que su salud no se quebrantara. La Matemática era tabú, basándose en la teoría de que los genios jóvenes pueden malgastarse al emplear excesivamente su cerebro. Su padre en realidad era un mal psicólogo. Este temor por la Matemática excitó, como es natural, la curiosidad del muchacho. Un día, teniendo 12 años, quiso saber lo que era la Geometría. Su padre le hizo una clara descripción, y Pascal creyó adivinar repentinamente su verdadera vocación. En contradicción con sus opiniones posteriores, Pascal había sido llamado por Dios no para atormentar a los jesuitas, sino para ser un gran matemático. Pero sus oídos eran sordos y percibió las órdenes confusamente.
Lo que sucedió cuando Pascal comenzó a estudiar Geometría ha sido una de las leyendas de la precocidad matemática. De pasada podemos recordar que los niños prodigios en Matemática no aparecen repentinamente, como algunas veces se ha dicho de ellos. La precocidad en Matemática ha sido muchas veces el primer destello de una gloriosa madurez, a pesar de la persistente superstición de lo contrario. En el caso de Pascal la genialidad matemática precoz no se extinguió con el desarrollo, pero fue ahogada por otros problemas. La capacidad para la Matemática persistió, como puede observarse en el caso de la cicloide, en una época posterior de su breve vida, y si hay que buscar un culpable de que pronto renunciara a la Matemática, se encontraría probablemente en su estómago. Su primera hazaña espectacular fue demostrar por su iniciativa y sin la sugestión de ningún libro que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. Esto le alentó a continuar en sus estudios.
Dándose cuenta de que tenía en su casa a un gran matemático, el padre lloró de gozo y entregó a su hijo un ejemplar de los *Elementos* de Euclides. Fue rápidamente devorado, no como un trabajo, sino como un placer. El muchacho dejó sus juegos en favor de la Geometría. En relación con el conocimiento rapidísimo que Pascal tuvo de Euclides, su hermana Gilberte se permite un embuste. Cierto es que Pascal planteó y demostró por sí mismo diversas proposiciones de Euclides antes de haber visto el libro. Pero lo que Gilberte narra acerca de su brillante hermano es

más improbable que colocar en fila un billón de partículas. Gilberte declara que su hermano había redescubierto por sí mismo las Primeras 32 proposiciones de Euclides, y que las encontró en el mismo orden en que Euclides las había establecido. La proposición 32 es, en efecto, la famosa de la suma de los ángulos de un triángulo que Pascal redescubrió. Ahora bien, existe una sola forma de hacer bien una cosa, pero parece más probable que existe una infinidad de formas de hacerla mal. En la actualidad sabemos que las supuestas rigurosas demostraciones de Euclides, incluso las cuatro primeras de sus proposiciones, no prueban nada. El hecho de que Pascal cayera en los mismos errores que Euclides por su propia cuenta es una historia fácil de contar pero difícil de creer. Podemos, sin embargo, perdonar esta fanfarronada de Gilberte. Su hermano era digno de ella. Tenía 14 años cuando fue admitido en las discusiones científicas semanales dirigidas por Mersenne, de las cuales nació la Academia Francesa de Ciencias.

Mientras el joven Pascal se hacía casi un geómetra por su propio esfuerzo, el viejo Pascal se colocó en pugna con las autoridades debido a, su honradez y rectitud general. En particular, el desacuerdo había sido con el Cardenal Richelieu acerca de una pequeña cuestión de los impuestos. El Cardenal estaba irritado y la familia de Pascal se ocultó hasta que la tormenta pasara. Se dice que la bella e ingeniosa Jacqueline salvó a la familia y restableció las relaciones de su padre con el cardenal, gracias a su brillante actuación en una fiesta celebrada para la diversión de Richelieu, donde actuó de incógnito. Al preguntar el nombre de la encantadora joven artista que le había cautivado, y al decirle que era la hija de su pequeño enemigo, Richelieu perdonó generosamente a toda la familia y colocó al padre en un cargo político en Rouen. Teniendo en cuenta lo que se sabe de esa vieja serpiente que fue el Cardenal Richelieu, esta agradable historia es probablemente un mito. De todos modos, la familia Pascal encontró un cargo y tranquilidad en Rouen. Allí el joven Pascal conoció al dramaturgo Corneille, que quedó muy impresionado por el talento del muchacho. A la sazón Pascal era esencialmente matemático y Corneille seguramente no pudo sospechar que su joven amigo llegara a ser uno de los grandes creadores de la prosa francesa.

En este tiempo Pascal estudiaba incesantemente. Antes de cumplir los 16 años (alrededor del año 1639)[1] demostró uno de los más bellos teoremas de toda la Geometría. Por fortuna se puede explicar en términos comprensibles para cualquiera. Sylvester, un matemático del siglo XIX del que nos ocuparemos más tarde, lo llamó "el gran teorema de Pascal". En primer término expondremos una forma especial del teorema general que puede ser construido con sólo el uso de una regla.

Consideremos dos líneas rectas que se cortan, *l* y *l*'. En *1* marcar 3 puntos diferentes *A, B, C,* y en *1'* otros tres puntos diferentes *A', B', C'*. Unir estos puntos por rectas del siguiente modo: *A* y *B*', *A*' y *B*, *B* y *C*', *B'* y *C*, *C* y *A*', *C'* y *A*. Las dos rectas de cada uno de estos pares se cortan en un punto

[1] Los autores difieren acerca de la edad de Pascal cuando hizo este estudio, calculándose entre 15 y 17 años. La edición de 1819 de las obras de Pascal contiene un breve resumen de ciertas proposiciones sobre las secciones cónicas, pero éste no es el ensayo completo que Leibniz vio.

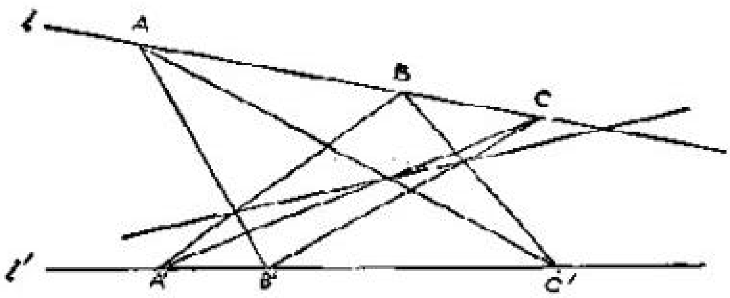


Figura 5.1

Tenemos así tres puntos. El caso especial del teorema de Pascal que nosotros ahora describimos expresa que estos tres puntos están en línea recta.

Antes de dar forma general al teorema mencionaremos otro resultado igual al precedente. Es el obtenido por Desargues (1593-1662). Si las tres líneas rectas que se obtienen uniendo los vértices de dos triángulos *XYZ* y *xyz* coinciden en un punto, las tres intersecciones de los pares de lados correspondientes están en línea recta. Así, *si* las líneas rectas que unen, X y *x*, *Y* e *y*, *Z* y *z* coinciden en un punto, *entonces* las intersecciones de *X Y* y *x y*, *Y Z* e *y z*, *ZX* y *zx* están en línea recta.

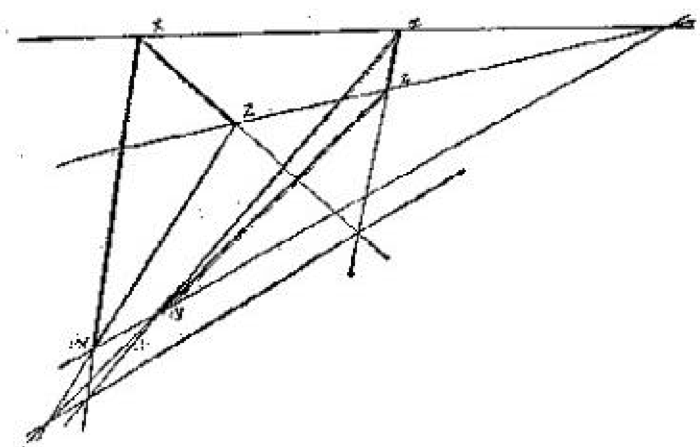


Figura 5.2

En el capítulo 11 hemos expuesto lo que es una sección cónica. Imaginemos cualquier sección cónica, por ejemplo una elipse. Sobre ella se marcan seis puntos cualesquiera, *A, B, C, D, E, F,* y se unen en este orden por líneas rectas. Tenemos así una figura de 6 lados, inscrita en la sección cónica, en la cual *AB* y *DE, BC* y *EF, CD* y *FA*, son pares de lados opuestos. Las tres rectas que determinan los seis vértices se cortan en un punto. Los tres puntos de intersección están en línea recta

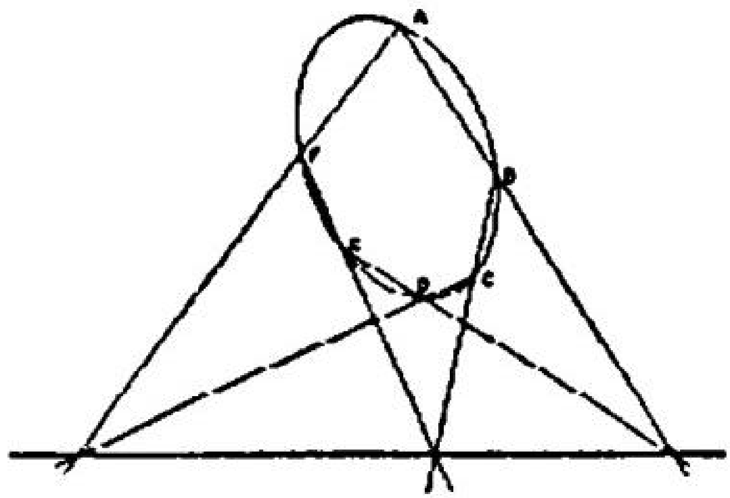


Figura 5.3

Este es el teorema de Pascal; la figura que proporciona es lo que él llama "hexagrama místico". Probablemente demostró primero su exactitud para un círculo, y luego lo amplió por proyección a cualquier sección cónica. Sólo se requiere una regla y un par de compases si el lector desea ver que la figura es igual para un círculo.

Pueden mencionarse diversas cosas asombrosas acerca de esta maravillosa proposición, y no es la menos importante la de que fue descubierta y probada por un muchacho de 16 años. Por otra parte, en su *Essai pour les coniques,* dedicado a este gran teorema por este muchacho extraordinariamente inteligente se deducen sistemáticamente, como corolarios no n-ieaos de 400 proposiciones sobre las secciones cónicas, incluyendo la obra de Apolonio y de otros autores, permitiendo que los pares de puntos coincidan, de modo que una cuerda se transforme en una tangente, y apelando a otros recursos. Jamás fue publicado todo el *Essai,* y parece que se ha perdido irremisiblemente, pero Leibniz vio y estudió un ejemplar. Además, el *tipo* de Geometría de Pascal difiere fundamentalmente de la de los griegos; no es métrica, sino *descriptiva o proyectiva.* Magnitudes de líneas o de ángulos no figuran en la exposición ni en la prueba del teorema. Este teorema basta por sí mismo para abolir la estúpida definición de la Matemática, heredada de Aristóteles y reproducida algunas veces en los diccionarios, como la ciencia de la “cantidad". No existen "cantidades" en la Geometría de Pascal.

Para ver lo que significa la *proyección* del teorema imaginemos un cono (circular) de luz que surja de un punto y atraviese una lámina plana de vidrio estando el cono en diversas posiciones. La curva que limita la figura en que la lámina corta al cono, es una sección cónica. Si se traza el "hexagrama místico" de Pascal sobre el cristal para cualquier posición determinada y se coloca otra lámina de cristal a través del cono, de modo que caiga sobre ella la sombra del hexagrama, tal *sombra será otro "hexagrama místico*" con sus tres puntos de intersección de pares opuestos de lados que están en línea recta, la sombra de la recta de los tres puntos" en el hexagrama original. Es decir, el teorema de Pascal es *invariante* (no cambiado) *en proyección cónica.* Las propiedades métricas de las figuras estudiadas en la Geometría elemental no son invariantes en proyección; por ejemplo, la sombra de un ángulo recto no es un ángulo recto en todas las posiciones de la segunda lámina. Es natural que este tipo de Geometría proyectiva *o descriptiva* sea una de las Geometrías naturalmente adaptadas a algunos de los problemas de perspectiva. El método de proyección fue usado por Pascal para probar su teorema, pero había sido ya aplicado por Desargues para deducir el resultado antes expuesto referente a dos triángulos "en perspectiva". Pascal reconoció a Desargues el mérito de su gran invención.

Desde la edad de 17 años hasta el final de su vida, a los 39, Pascal pasó pocos días sin dolor. Una dispepsia hizo de sus días un tormento, y un insomnio crónico hizo de sus noches una constante pesadilla. Sin embargo, trabajó incesantemente. A los 18 años inventó y construyó la primera máquina calculadora de la historia, el antepasado de todas las máquinas calculadoras que han desplazado verdaderos ejércitos de empleados en nuestra generación. Más tarde volveremos a ocuparnos de esta ingeniosa invención. Cinco años más tarde, en 1646, Pascal sufrió su primera "conversión". No fue profunda, posiblemente debido a que Pascal tenía sólo 23 años y estaba aún absorbido en su Matemática. Desde ese tiempo, la familia, que había sido devota, cayó en una apacible locura.

Es difícil para un hombre moderno imaginar las intensas pasiones religiosas que inflamaron el siglo XVII, que separaron familias y que dieron lugar a que países y sectas que profesaban el cristianismo se lanzaran unos contra otros. Entre los aspirantes a ser reformadores religiosos de la época se hallaba Cornelius Jansen (1585-1638), un ardiente holandés que llegó a ser obispo de Yprés. Un punto cardinal en su dogma era la necesidad de la "conversión" como un medio para la "gracia", en una forma algo semejante a la de ciertas sectas que hoy florecen. Sin embargo, la salvación parecía ser una de las ambiciones menores de Jansen. Estaba convencido de que Dios le había elegido especialmente para atormentar a los jesuitas en esta vida y prepararles para la condena eterna en la otra. Ésta era lo que él llamaba su misión. Su credo no era ni el catolicismo ni el protestantismo, aunque se acercaba más bien a este último. Su idea directriz era, en primer término, en último término y siempre, un terrible odio para aquellos que discutieran su fanatismo dogmático. La familia de Pascal abrazó entonces (1646), aunque no demasiado ardientemente al principio, el desagradable credo del jansenismo. Así, Pascal, a la precoz edad de 23 años, comenzó ya a. marchitarse. En el mismo año todo su aparato digestivo funcionaba mal y además sufrió parálisis temporales. Pero no estaba muerto intelectualmente.

Su grandeza científica dio nuevos destellos en el año 1648, aunque en una dirección completamente nueva. Estudiando las obras de Torricelli (1608-1647) sobre la presión atmosférica, Pascal le superó, demostrando que comprendía el método científico que Galileo, el maestro de Torricelli, había dado al mundo. Mediante experimentos con el barómetro, que él sugirió, Pascal demostró los hechos ahora familiares para todos los estudiantes de Física, referentes a la presión de la atmósfera. Gilberte, la hermana de Pascal, había contraído matrimonio con Mr. Périer. Por sugestión de Pascal, Périer realizó el experimento de transportar un barómetro hasta el Puy de Dóme, en Auvernia y observó el descenso de la columna de mercurio cuando la presión atmosférica decrecía. Más tarde, Pascal, al volver a París con su hermana Jacqueline, repitió el experimento por sí mismo.

Poco después de que Pascal y Jacqueline volvieran a París se unieron a su padre, a la sazón nombrado consejero de Estado. Por entonces la familia recibió la visita un tanto formal de Descartes. El y Pascal charlaron acerca de muchas cosas, incluso del barómetro. Poca cordialidad existía entre los dos. Por una parte, Descartes se oponía abiertamente a creer que el famoso *Essai pour les coniques* hubiera sido escrito por un muchacho de 16 años. Por otra parte, Descartes sospechaba que Pascal le había usurpado la idea y los experimentos barométricos cuando discutía sus posibilidades en cartas dirigidas a Mersenne. Como ya hemos dicho, Pascal había asistido a las sesiones semanales del Padre Mersenne desde que tenía 14 años. Una tercera causa de enemistad era proporcionada por sus antipatías religiosas. Descartes, que sólo había recibido atenciones de los jesuitas, tenía por ellos gran aprecio; Pascal, que seguía al devoto Jansen, odiaba a los jesuitas más que el demonio odia el agua bendita. Y finalmente, según la cándida

Jacqueline, tanto su hermano como Descartes sentían celos recíprocos. La visita fue más bien un frío acontecimiento.
El buen Descartes, sin embargo, dio a su joven amigo algunos excelentes consejos con un espíritu verdaderamente cristiano. Aconsejó a Pascal que siguiera su propio ejemplo y que permaneciera en cama todos los días hasta las once de la mañana. Para el arruinado estómago de Pascal describió una dieta que se componía tan sólo de caldo. Pero Pascal no hizo el menor caso de estos consejos, posiblemente debido a que procedían de Descartes. Una de las cosas de que Pascal más carecía era del sentido del humor.
Por entonces comenzó a decaer el interés que Jacqueline sentía por el genio de su hermano, y en el año 1648, a la impresionante edad de 23 años, Jacqueline declaró su intención de trasladarse a Port-Royal, cerca de París, el principal asiento de los jansenistas de Francia para ingresar en un convento. Su padre se opuso tenazmente al proyecto, y la devota Jacqueline concentró sus frustrados esfuerzos en su pobre hermano. Jacqueline sospechaba que Blaise no estaba tan completamente convencido como ella desearía, y parece que estaba en lo cierto. Por entonces la familia volvió a Clermont durante dos años.
En estos dos rápidos años, Pascal parece haber sido casi un ser medio humano, a pesar de las admoniciones de su hermana Jacqueline de que se entregara totalmente al Señor. Hasta el recalcitrante estómago, sometido a una disciplina racional, dejó de atormentarle durante largos meses.
Se dice por algunos y se niega violentamente por otros que Pascal, durante este sano intermedio y durante algunos años más tarde, descubrió los usos predestinados del vino y de las mujeres. El nada confiesa, pero estos bajos rumores pueden haber sido nada más que rumores Después de su muerte, Pascal pasó rápidamente a la hagiocracia cristiana, y todos los ensayos para descubrir los hechos de su vida como ser humano fueron rápidamente anulados por facciones rivales, una de las cuales se esforzaba por demostrar que era un fanático devoto y la otra un ateo escéptico, aunque ambas declarasen que Pascal era un santo que no pertenecía a esta tierra.
Durante estos venturosos años la morbosa santidad de Jacqueline continuó actuando sobre su frágil hermano. Por un capricho de la ironía, Pascal, que al presente se había convertido, dio lugar a que se cambiasen los papeles, y empujó a su muy piadosa hermana a que ingresara en el convento, que ahora quizá parecía menos deseable. Como es natural, esto no es la interpretación ortodoxa de lo que habría sucedido, pero quien no sea un ciego partidario de una secta o de otra, cristianismo o ateísmo, encontrará más racional la explicación de que existían malsanas relaciones entre Pascal y su hermana soltera y no las sancionadas por la tradición.
Cualquier lector moderno de los *Pensées* debe quedar sorprendido, por ciertas cosas que, o bien escapan completamente a nuestros más reticentes antepasados o eran ignoradas por ellos en su más discreta benevolencia. Las cartas revelan muchas cosas que sería mejor hubieran quedado enterradas. Los desatinos de Pascal en los *Pensées* acerca de la "lujuria" le descubren de un modo completo, y también lo atestiguan los hechos bien probados de su furor completamente antinatural cuando veía a su hermana casada Gilberte acariciar a sus hijos.
Los modernos psicólogos, no menos que los antiguos con sentido común, han hecho notar frecuentemente la notable relación entre la represión sexual y el morboso fervor religioso. Pascal sufría de ambos y sus inmortales *Pensées* son un brillante, aunque algunas veces incoherente testimonio de sus excentricidades puramente fisiológicas. Si el hombre hubiera sido suficientemente humano para no contrariar a su naturaleza hubiera podido vivir, desarrollar todo lo que en él había, en lugar de ahogar su mejor mitad bajo un cúmulo de misticismo sin significación y absurdas observaciones sobre la "grandeza y miseria del hombre".

Siempre sin reposo, la familia volvió a París en 1650. Al año siguiente el padre murió. Pascal aprovechó la ocasión para escribir a Gilberte y su marido un largo sermón acerca de la muerte en general. Esta carta ha sido muy admirada. No necesitamos reproducirla aquí, pues el lector que desee formar su opinión, puede fácilmente encontrarla. Es un misterio difícil de comprender por qué esa pedante efusión de confusa y cruel moralidad, aprovechando la muerte de un pariente posiblemente muy querido, haya podido despertar la admiración en lugar de desprecio para su autor, igual que el amor de Dios que la carta rezuma *ad nauseam*. Nada puede decirse acerca de los gustos, y aquellos a quienes es grato la clase de cuestiones que Pascal expone en su carta pueden gozar de ella, que al fin y al cabo es una obra maestra de autorrevelación en la literatura francesa.

Un resultado más práctico de la muerte del padre fue la oportunidad que se le ofreció a Pascal para administrar las propiedades y reanudar sus relaciones con sus parientes. Alentado por su hermana Jacqueline marchó a Port-Royal, pues su padre ya no podía oponerse. Sus dulces relaciones con el alma de su hermano se hallaban ahora salpicadas por una discordia muy humana acerca de la división de las propiedades.

Una carta del año anterior (1650) revela otra faceta del carácter reverente de Pascal o posiblemente su envidia por Descartes. Deslumbrado por la brillantez de Cristina de Suecia, Pascal humildemente puso su máquina calculadora a los pies de la "más grande Princesa del mundo", declarando en frases cálidas que era tan eminente desde el punto de vista intelectual como social. No se sabe lo que Cristina hizo con la máquina, pero lo cierto es que no invitó a Pascal para reemplazar a Descartes.

Al fin, el 23 de noviembre de 1654, Pascal se convirtió realmente. De acuerdo con algunos relatos vivió durante tres años una vida que casi no lo era. Otros autores parecen en cambio aceptar que no hay nada de cierto en esta tradición y que su vida no fue tan dura como se cuenta y que, aparte de que haya sido un enfermo, hubo en ella algo más que Matemática y santidad. El día de su conversión guiaba un coche de cuatro caballos y éstos se espantaron. Los caballos saltaron el parapeto del puente de *Neuilly*, pero los tirantes se rompieron y Pascal quedó en la carretera.

Para un hombre del temperamento místico de Pascal esta feliz salvación de una muerte violenta fue considerada como una advertencia del cielo que le impulsó a salvarse del precipicio moral en el que, víctima de su morboso autoanálisis, se imaginaba hallarse. En un pequeño fragmento de pergamino escribió algunos oscuros sentimientos de mística devoción, y desde entonces lo colocó cerca de su corazón como un amuleto para que le protegiera de las tentaciones y le recordara la bondad de Dios que le había salvado a él, miserable pecador, de la boca del infierno. Desde entonces creyó estar en gracia, y durante el resto de su vida sufrió alucinaciones en las que veía un precipicio ante sus pies.

Jacqueline, ahora novicia del convento de Port-Royal, vino en ayuda de su hermano. En parte por su propia cuenta, en parte debido a los ruegos persuasivos de su hermana, Pascal volvió la espalda al mundo y fijó su residencia en Port-Royal para dedicar su talento a la contemplación de "la grandeza y miseria del hombre". Esto ocurría en 1654, cuando Pascal tenía 31 años. Antes, habiendo desechado para siempre las torturas de la carne y de la mente, había completado su más importante contribución a la Matemática, el Cálculo de probabilidades creado en unión con Fermat. Para no interrumpir la historia de su vida demoraremos por el momento la exposición de este suceso.

Su vida en Port-Royal era al menos sana, aunque no tan sana como podría haber deseado, y la rutina llena de orden benefició considerablemente su precaria salud. Se hallaba en Port-Royal cuando escribió las famosas *Cartas Provinciales* inspiradas por el deseo de ayudar a salvar a

Arnauld, la luminosa guía de la institución, de la acusación de herejía. Estas famosas cartas (la primera de las 18, fue impresa el 23 de enero de 1656), son obras maestras de habilidad para la controversia y se dice que infringieron a los jesuitas un golpe del que su Sociedad jamás ha vuelto a reponerse totalmente. Sin embargo, cualquiera puede observar con sus propios ojos que la Sociedad de Jesús aun florece. Puede, pues, dudarse de que tales Cartas tengan la potencia mortífera atribuidas a ellas por críticos simpatizantes de su intensa preocupación por las cuestiones relativas a su a la miseria del hombre, Pascal fue aún capaz de hacer excelente matemática, aunque considerase el cultivo de toda ciencia como una vanidad que debía ser expulsada por sus malos efectos sobre el alma. De todos modos, volvió a huir una vez más, pero sólo una, de la gracia de Dios, en ocasión del famoso caso de la cicloide.

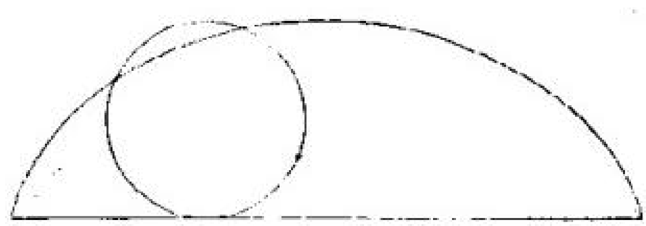


Figura 5.4

Curva bellamente proporcionada (descrita por el movimiento de un punto fijo sobre la circunferencia de una rueda que gira apoyándose sobre una línea recta, sobre el pavimento liso) se dice que apareció en la literatura matemática en 1501, cuando Charles Bouvelles la describió en relación con la cuadratura del círculo. Galileo y su discípulo Viviani la estudiaron y resolvieron el problema de construir una tangente a la curva en cualquier punto (un problema que Fermat resolvió inmediatamente que quedó planteado) y Galileo aconsejó su empleo como arco para los puentes. Desde que es común el uso del hormigón armado para los arcos de cicloide, se ven con frecuencia en los altos viaductos. Por razones mecánicas (desconocidas por Galileo), el arco de cicloide es superior a cualquier otro en construcción. Entre los hombres famosos que han estudiado la cicloide se encuentra Sir Christopher Wren, el arquitecto de la catedral de San Pablo, quien determina la longitud de cualquier arco de esta curva y su centro de gravedad, mientras Huygens, por razones mecánicas, la introdujo en la construcción de los relojes de péndulo. Uno de los más bellos descubrimientos de Huygens (1629-1695) está en relación a la cicloide. Dicho autor demostró que es la tautócrona, es decir la curva que cuando está colocada hacia arriba semeja un cuenco, en la que los puntos colocados en cualquier parte de ella se deslizan hacia el punto más bajo por la influencia de la gravedad en el mismo tiempo. Para explicar sus elegantes y singulares propiedades se han producido infinitas disputas entre los pendencieros matemáticos que se desafiaban recíprocamente para resolver este o aquel problema en relación con ella. La cicloide, por tanto, ha sido llamado "la Helena de la Geometría", en recuerdo de la mujer de Menelao, de quien se dice que por ella "se lanzaron al mar un millar de barcos".

Entre otras angustias que afligieron al endeble Pascal recordaremos el insomnio persistente y los padecimientos dentales, en una época en que la dentistería era ejercida por el barbero con un par de tenazas y la fuerza bruta. Estando una noche en vela (1658) por las torturas del dolor de muelas, Pascal comenzó a pensar furiosamente en la cicloide, intentando eliminar de su mente el terrible dolor. Con sorpresa se dio cuenta de que el dolor había desaparecido. Interpretando este hecho como una señal del cielo de que no era pecado para su alma pensar en la cicloide, Pascal siguió sus trabajos. Durante ocho días se entregó a la geometría de la cicloide y consiguió resolver muchos de los principales problemas en relación con ella. Algunos de los hechos por él descubiertos fueron publicados con el seudónimo de Amos Dettonville, desafiando a los matemáticos franceses e ingleses. En su trato con sus rivales, Pascal no era siempre tan escrupuloso corno podía haber sido. Éste fue su último vuelo por la Matemática y su única contribución a la ciencia después de vivir en Port-Royal.

El mismo año (1658) se sintió más gravemente enfermo de lo que había estado en toda su atormentada vida. Incesantes dolores de cabeza le impedían conciliar el sueño. Sufrió durante cuatro años, viviendo cada vez más ascéticamente. En junio de 1662 cedió su propia casa a una familia pobre que padecía viruela, como un acto de abnegación y fue a vivir con su hermana casada. El 19 de agosto de 1662 su infortunada existencia terminó entre terribles convulsiones. Pascal murió a la edad de 39 años.

El post mortem reveló lo que ya se esperaba, respecto al estómago y órganos vitales, descubriéndose también una grave lesión en el cerebro. A pesar de todo esto Pascal pudo llevar a cabo una gran obra en Matemática y en la ciencia y ha dejado un nombre en la literatura que es aún respetado después de haber transcurrido tres siglos.

Las bellas cosas que la Geometría debe a Pascal, con la posible excepción *del "hexagrama místico*", pudieron haber sido realizadas por otros hombres. Tal puede decirse especialmente de la investigación de la cicloide. Después de la invención del Cálculo, estos estudios han venido a ser incomparablemente más fáciles de lo que habían sido antes y se incluyen en los manuales como simples ejercicios para los jóvenes estudiantes. Pero en la creación que hizo, junto con Fermat, de la teoría matemática de la probabilidad, Pascal descubrió un nuevo mundo. Parece muy probable que Pascal será recordado cada vez más por esta importante invención, cuando su fama de escritor haya sido olvidada. Los *Pensées* y las *Cartas Provinciales*, aparte de sus excelencias literarias, se dirigen principalmente a un tipo mental que rápidamente se está extinguiendo. Los argumentos en pro o en contra de un punto particular son considerados por una mente moderna como trivialidades no convincentes, y las cuestiones a las que Pascal se entregó con tan ferviente celo ahora aparecen extraordinariamente ridículas. Si los problemas que discutió sobre la grandeza y miseria del hombre fueran problemas tan profundamente importantes como los entusiastas han pretendido, y no simples pseudoproblemas planteados místicamente e incapaces de solución, no parece probable que pudieran ser resueltos por moralizaciones absurdas. Pero en su teoría de las probabilidades, Pascal plantea y resuelve un problema importante. El de llevar al puro azar, que superficialmente parece no obedecer a leyes, al dominio y la ley del orden, de la regularidad, y actualmente esta sutil teoría parece hallarse en las raíces del conocimiento humano no menos que en la fundación de la ciencia física. Sus ramificaciones se hallan por todas partes, desde la teoría de los quanta a la epistemología.

Los verdaderos fundadores de la teoría matemática de la probabilidad fueron Pascal y Fermat, quienes desarrollaron los principios fundamentales de los problemas en una interesante y abundante correspondencia durante el año 1654. Esta correspondencia se encuentra en las *Oeuvres de* Fermat (editadas por P. Tannery y C. Henry, volumen II, 1904). Las cartas muestran que Pascal y Fermat participaron igualmente en la creación de la teoría. Sus soluciones correctas de los problemas difieren en detalles, pero no en principios fundamentales. Debido a la tediosa enumeración de los casos posibles en un cierto problema, de "puntos", Pascal intentó seguir un atajo y cayó en el error. Fermat señaló la equivocación que Pascal reconoció. La primera carta de la serie se ha perdido, pero la causa de la correspondencia es bien conocida.

El problema inicial de que partió toda la vasta teoría fue propuesto a Pascal por el caballero De Méré, un jugador profesional o poco más. El problema era el de los "puntos": cada uno de los dos jugadores (juego de los dados) necesita cierto número de puntos para ganar el juego. Si suspenden el juego antes de que termine, ¿cómo pueden ser divididas las apuestas entre ellos? El resultado (números de puntos) obtenido por cada jugador corresponde al momento de la suspensión, y el problema consiste en determinar la probabilidad que cada jugador tiene, en una determinada fase del juego, de ganarlo. Se acepta que los jugadores tienen igual probabilidad de ganar un punto. La solución tan sólo exige un sólido sentido común; la matemática de la probabilidad interviene cuando buscamos un método para enumerar los casos posibles sin que realmente hayan ocurrido. Por ejemplo ¿cuántas "manos" diferentes, consistentes cada una en tres doses y otras tres cartas, ninguna dos, existen en una baraja común de 52 naipes? O ¿cuántas veces al arrojar 10 dados se obtienen 3 ases 5 doses y 2 seises? Un tercer juego del mismo tipo es resolver ¿cuántos brazaletes diferentes pueden hacerse engarzando 10 perlas, 7 rubíes, 5 esmeraldas y 8 zafiros, si las piedras de cada tipo no pueden distinguirse?

Este detalle de encontrar el número de veces que puede hacerse una determinada cosa o cuántas veces puede suceder, pertenece a lo que se llama análisis combinatorio. Su aplicación a la probabilidad es manifiesta. Supongamos, por ejemplo, que deseamos conocer las probabilidades de obtener dos "ases" y un "dos" en una sola tirada con tres dados. Si nosotros conocemos el número total de formas (6 * 6 * 6 = 216) en que los tres dados pueden caer, y también el número de formas (digamos *n* para que el lector pueda encontrarlo por sí mismo) en que pueden obtenerse 2 "ases" y 1 "dos", la probabilidad es *n*/216. (Aquí *n* es 3, de modo que la probabilidad es 3/216). Antoine Gombaud, caballero De Méré, inspirador de estos estadios, es descrito por Pascal como un hombre que tenía una buena inteligencia sin ser matemático, mientras Leibniz, que parece tener pocas simpatías por el alegre caballero, le considera como un hombre de mente penetrante, un filósofo y un jugador, en una combinación desusada.

En relación con los problemas de análisis combinatorio y de probabilidad, Pascal hizo abundante uso del triángulo aritmético:

1						
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

en el cual los números de cada fila, después de las dos primeras, se obtienen de los que se encuentran en la fila precedente copiando debajo los terminales 1 y sumando los pares sucesivos de números de izquierda a derecha; así, en la fila quinta 5 = 1 + 4, 10 = 4 + 6, 10 = 6 + 4, 5 = 4 + 1. Los números en la fila *n*, después de l, son el número de las diferentes combinaciones[2] que pueden hacerse con *n* cosas distintas tomadas, de una en una, de dos en dos, de tres en tres... Por ejemplo, 10 es el número de pares diferentes de cosas que pueden ser combinadas con cinco cosas distintas. Los números de la fila *n* son también los coeficientes del desarrollo de $(1 + x)^n$ por el teorema del binomio (llamado de Newton), de modo que para n = 4,

[2] Combinaciones de *n* objetos, tomados de 1 en 1, de 2 en 2, de 3 en 3, etc., es el número de grupos que se pueden tomar con los *n* objetos, de manera que un grupo se diferencia de otro por lo menos en un objeto. Por ejemplo: cuatro objetos *A, B, C, D*, se pueden combinar de dos en dos en las seis formas siguientes. *AB, AC, AD, BC, BD y CD* (N. del T.).

$$(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

El triángulo tiene otras numerosas e interesantes propiedades. Aunque era conocido antes de los tiempos de Pascal se le suele dar su nombre para recordar el ingenioso uso que Pascal hizo de él en las probabilidades.

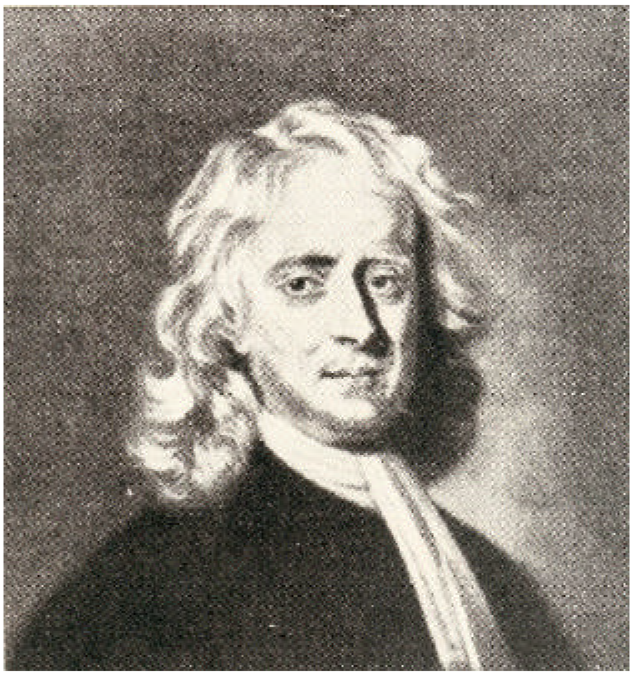
La teoría que se originó en una disputa de jugadores es ahora la base de muchas empresas que consideramos más importantes que el juego, incluso todos los tipos de seguros, estadística matemática y su aplicación a la biología. Y mediciones en la educación así como en la física teórica moderna. Ya no pensamos que un electrón se encuentra en un determinado lugar en un determinado instante, sino que calculamos su probabilidad de estar en una región determinada. Una ligera reflexión mostrará que hasta las más simples mediciones que hacemos (cuando intentamos medir alguna cosa exactamente) son de carácter estadístico.

El humilde origen de esta teoría matemática extraordinariamente útil es típico de otras muchas cosas. Algunos problemas al parecer triviales, que fueron resueltos al principio por una vana curiosidad, conducen a generalizaciones profundas que, como en el caso de la nueva teoría estadística del átomo en la teoría de los cuantos, pueden ser la causa de que se revise toda nuestra concepción del universo físico, o, como ha sucedido con la aplicación de los métodos estadísticos a los tests de la inteligencia y a la investigación de la herencia, pueden inducirnos a modificar nuestras primitivas creencias referentes a la "grandeza y miseria del hombre". Como es natural, ni Pascal ni Fermat pudieron prever cuáles serían las consecuencias de sus descubrimientos. Toda la trama de la Matemática está tan íntimamente entrelazada que no podemos desenredarla y eliminar algún hilo determinado que no sea de nuestro gusto, sin peligro de destruir todo el tejido.

Pascal, sin embargo, hizo una aplicación de las probabilidades (en los *Pensées*) que para su época era rigurosamente práctica. Se trata de su famosa "apuesta". La "esperanza matemática" en un juego es el valor de las apuestas multiplicado por la probabilidad de ganar el juego. Según Pascal el valor de la felicidad eterna es infinito. Razonaba de este modo: *Aun cuando sea muy pequeña la probabilidad de obtener la felicidad eterna siguiendo una vida religiosa, ya que la esperanza es infinita (cualquier fracción finita del infinito es también infinita), recomendaremos a todos que sigan tal tipo de vida*. Siguió su propio consejo, pero como si quisiera demostrar que no lo había seguido completamente se plantea en otro lugar de los *Pensées* esta pregunta totalmente escéptica. ¿Es probable la probabilidad? Es aburrido como él, dice en otro lugar, dedicarse a tales bagatelas, aunque haya tiempo para ellas. La dificultad de Pascal es que no siempre veía cuando se trataba de bagatelas, como en su apuesta contra Dios, y cuando profundizaba en su trabajo, como en el caso del azar en el juego que el caballero De Méré le planteó.

Capítulo Sexto
En la Playa

NEWTON



El método de fluxiones (el Cálculo infinitesimal) es la clave general en cuya virtud la Matemática moderna revela el secreto de la Geometría y, en consecuencia, de la naturaleza.

Obispo de Berkeley

Yo no fraguo hipótesis.

Isaac Newton

"No sé lo que el mundo pensará de mí, pero a mí me parece ser tan solo un muchacho que juega en la playa y que se divierte al encontrar canto rodado o una concha más hermosa que de ordinario, mientras el gran océano de la verdad yace ante mis ojos sin descubrir".

Esta era la idea que tenía de sí Isaac Newton al final de su larga vida. Sin embargo, sus sucesores, capaces de apreciar su obra, han afirmado, casi sin excepción, que Newton es la inteligencia suprema que la raza humana ha producido "cuyo genio superó el tipo humano".

Isaac Newton nació el día de Navidad ("antiguo estilo" de fechar) de 1642, el año de la muerte de Galileo. Procedía de una familia de pequeños pero independientes granjeros que vivían en la casa señorial la aldea de Woolsthorpe, 13 kilómetros al sur de Grantham en el condado de Lincoln, Inglaterra. Su padre, también llamado Isaac, murió a la edad de 37 años, antes de que naciera su hijo. Newton fue un prematuro. Cuando nació era tan frágil y desmedrado que dos mujeres que habían ido a buscar un "tónico" a la casa de un vecino, creían que a su regreso el niño habría muerto. Su madre decía que era tan pequeño al nacer que cabía fácilmente en un cubo de un litro.

No se conoce suficientemente la genealogía de Newton, que podría ser interesante para los estudiosos de la herencia. Su padre era considerado por los vecinos como un "hombre débil, violento y extravagante". Su madre, Hannah Ayscough, era económica, diligente y buena ama de casa. Después de la muerte de su marido Mrs. Newton fue recomendada como una viuda previsora a un viejo bachiller diciéndole que era "extraordinariamente una buena mujer". El cauteloso bachiller, el reverendo Barnabas Smith, de la parroquia vecina de North Witham, contrajo matrimonio con la viuda. Mrs. Smith dejó a su hijo de tres años al cuidado de su abuela. En su segundo matrimonio tuvo tres hijos, ninguno de los cuales mostró una capacidad especial. De las propiedades del segundo matrimonio de la madre y de las propiedades del padre Newton tenía un ingreso 80 libras al año, que, como es natural, era mucho más en el siglo XVII de lo que podían serlo ahora.

Newton no era, pues, uno de los grandes matemáticos que tuvo que luchar con la pobreza.

Siendo niño, Newton, como no era robusto, se veía forzado a prescindir de los toscos juegos de los niños de su edad. En lugar de divertirse del modo usual, Newton inventaba otras diversiones, que ya revelan su genio. Se ha dicho por algunos que Newton no fue precoz. Podrá ser cierto por lo que a la Matemática se refiere, pero si se dice lo mismo en otros aspectos, será necesario hacer una nueva definición de la precocidad. El genio experimental insuperable que Newton mostró como observador de los misterios de la luz se revela ya en la ingeniosidad de sus diversiones infantiles. Linternas para aterrorizar a los crédulos aldeanos durante la noche, juguetes mecánicos perfectamente construidos que él fabricaba por sí mismo y que se movían, ruedas hidráulicas, un molino que molía trigo, proporcionando una nívea harina, con un gran ratón (que devoraba la mayor parte de ella), relojes de sol y un reloj de madera que marchaba automáticamente. Tales eran algunas de las cosas con que este muchacho "no precoz" intentaba divertir a sus compañeros de juego, encauzándoles por vías "más filosóficas". Aparte de estas evidentes muestras de talento, Newton leía mucho y apuntaba en su cuaderno todas las recetas misteriosas y todos los fenómenos extraños que se producían ante sus ojos.

La primera parte de la educación de Newton tuvo lugar en la escuela vecina. Un tío materno, el reverendo William Ayscough parece haber sido el primero en reconocer que Newton era algo diferente de muchacho. Graduado en Cambridge, Ayscough persuadió a la madre de Newton de que enviara a su hijo a Cambridge mantenerlo en su hogar, como ella pensaba, para ayudar a de la granja, a su vuelta a Woolsthorpe, después de la muerte o, cuando Newton tenía 15 años.

Antes de esto, sin embargo, Newton había cruzado su Rubicón por propia iniciativa. Por consejo de su tío había sido enviado a la Grammar School de Grantham, donde era atormentado por el camorrista la escuela, que un día golpeó a Newton en el estómago, causándole dolor físico y una intensa angustia mental. Alentado por uno de los profesores, Newton desafió al camorrista a una pelea limpia; se arrojó sobre él y como un final signo de humillación frotó las cobardes narices de su enemigo contra la pared de la iglesia. Hasta entonces Newton no había demostrado gran interés en las lecciones, pero ahora quiso probar que su cabeza era tan buena como sus puños y rápidamente llegó a ser el primero de la escuela. El Director y el tío Ayscough estuvieron de acuerdo en que Newton debía ser enviado a Cambridge; pero el día decisivo fue fijado cuando Ayscough sorprendió a su sobrino leyendo bajo un seto, cuando lo suponía ayudando a los mozos de la granja.

Mientras estuvo en la Grammar School de Grantham y luego, mientras se preparaba para ir a Cambridge, Newton se alojó en la casa de Mr. Clarke el boticario de la aldea. En la trastienda de la botica Newton encontró algunos libros viejos que rápidamente devoró. Durante su permanencia en la botica se enamoró de la hijastra de Clarke, Miss Storey, con la que se prometió antes de dejar Woolsthorpe para ir a Cambridge en junio de 1661, a la edad de 19 años. Pero aunque Newton conservó un cálido afecto para su primera y única Dulcinea de toda su vida, la ausencia y su creciente ensimismamiento en su obra, dieron lugar a que la novela fuera borrándose y Newton jamás contrajo matrimonio. Miss Storey fue más tarde Mrs. Vincent.

Antes de seguir la carrera de Newton en el Trinity College será bueno recordar brevemente la Inglaterra de su época y algunos de los conocimientos científicos de los cuales el joven se sentía heredero. Los fanáticos escoceses Estuardos, gobernaban Inglaterra en virtud de los derechos divinos de que se suponían investidos, con el raro resultado de que los simples seres humanos se sintieron ofendidos por la suposición de la autoridad celestial y se revelaron contra la sublime arrogancia, la estupidez y la incompetencia de sus gobernantes. Newton creció en una atmósfera de guerra civil política y religiosa en la que puritanos y realistas por igual, se dedicaban al saqueo siempre que necesitaban mantener sus ejércitos preparados para la lucha. Carlos I (nacido en 1600, decapitado en 1649), hizo todo lo que estaba en su poder para suprimir el Parlamento; pero a pesar de sus crueles extorsiones y de la villana capacidad de su Star Chamber (tribunal criminal) para pervertir la ley y la justicia común, no era comparable a los hoscos puritanos de Oliver Cromwell, quien, a su vez, quería llevar sus trapacerías hasta el Parlamento con una apelación a la divina Justicia de su sagrada causa.

Toda esta brutalidad e hipocresía tuvieron un efecto saludable sobre el carácter del joven Newton, que creció con un fiero odio a la tiranía, el subterfugio y la opresión, y cuando el rey Jacobo quiso inmiscuirse en los asuntos de la Universidad, el matemático y filósofo natural no necesitó aprender que una posición resuelta y un frente unido por parte de aquellos cuyas libertades estaban en peligro, son la defensa más eficaz contra una coalición de políticos no escrupulosos; él ya lo sabía por observación y por instinto.

Se atribuyen a Newton las siguientes palabras: "Si he ido algo más lejos que los otros, ello es debido a que me coloqué sobre los hombros de gigantes". Entre los más grandes de estos gigantes se hallaban Descartes, Kepler y Galileo. De Descartes, Newton heredó la Geometría analítica, en la que al principio encontró dificultades; de Kepler, las tres leyes fundamentales del movimiento planetario descubiertas empíricamente después de 22 años de cálculos sobrehumanos, mientras que de Galileo heredó las dos primeras de las tres leyes del movimiento que iban a ser la piedra angular de su propia dinámica. Pero únicamente con ladrillos no se hace una casa; Newton fue el arquitecto de la dinámica y de la mecánica celeste.

Como las leyes de Kepler han de desempeñar un papel importantísimo en el desarrollo de la ley de la gravitación universal debida a Newton, las mencionaremos a continuación:

1. *Planetas se mueven alrededor del Sol según elipses en que éste de los focos.* Si S y S' son los focos y P cualquier posición del planeta en su órbita, $SP + S'P$ es siempre igual a AA', que es el eje mayor de la elipse.

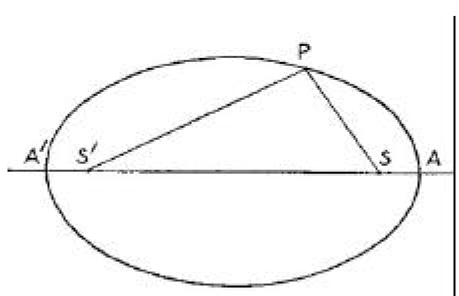


Figura 6.1

2. *La línea que une el Sol y un planeta, describe iguales áreas en tiempos iguales.*
3. *El cuadrado del tiempo de una revolución completa de cada planeta, es proporcional al cubo de su distancia media al Sol.*

Estas leyes pueden ser demostradas en una o dos páginas por medio del cálculo aplicado a la ley de la gravitación universal de Newton.

Dos partículas cualesquiera de materia en el Universo, se atraen recíprocamente con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Por lo tanto, si m, M son las masas de las dos partículas y d la distancia entre ellas (medidas en unidades apropiadas), la fuerza de atracción entre ellas donde k es un número constante:

$$\frac{k * m * M}{d^2}$$

eligiendo adecuadamente las unidades de masas y distancia, k puede ser considerada igual a 1, de modo que la atracción es simplemente.

$$\frac{m * M}{d^2}$$

Para completar expondremos las tres leyes del movimiento debidas a Newton:

1. *Todo cuerpo continuará en su estado de reposo o de movimiento uniforme (no acelerado), en línea recta en tanto que no sea obligado a cambiar ese estado por una fuerza exterior.*
2. *La razón del cambio del momentum* ("masa - tiempo - velocidad", siendo medidas en unidades apropiadas la masa y la velocidad) *es proporcional a la fuerza impresa y tiene lugar en la dirección en que la fuerza actúa.*
3. *Acción y reacción* (como en la colisión sobre una mesa sin fricción de bolas de billar perfectamente elásticas) *son iguales y opuestas* (el momentum que una bola pierde es ganado por la otra).

Lo más importante para la matemática de cuanto estamos diciendo es la palabra razón con que comienza la exposición de la segunda ley del movimiento, la razón del cambio. ¿Qué es una razón y cómo se mide? El momentum como se ha hecho notar, es "masa - tiempo - velocidad". Las masas a que Newton se refería se presume que permanecen constantes durante su movimiento, a diferencia de los electrones y otras partículas físicas, cuyas masas aumentan apreciablemente cuando su velocidad se aproxima a una fracción apreciable de la luz. Así, para investigar la razón del cambio del "momentum" le bastó a Newton aclarar lo que se entiende por *velocidad*, que es la razón del cambio de posición. Su solución de este problema que le dio un método matemático para investigar la velocidad de cualquier partícula que se mueve en cualquier forma continua le proporcionó la llave maestra de todo el misterio de las razones y su medida, el Cálculo *diferencial.*

Un problema similar que deriva de las razones, puso en sus manos el Cálculo integral. ¿Cómo se puede calcular la distancia total recorrida en un determinado tiempo por una partícula en movimiento cuya velocidad varía continuamente de un instante a otro? Respondiendo a este u otros problemas similares, algunos planteados geométricamente, Newton ha llegado al Cálculo integral. Finalmente, examinando conjuntamente los dos tipos de problemas, Newton hizo un descubrimiento capital: vio que el Cálculo diferencial y el Cálculo integral están íntima y recíprocamente relacionados por lo que actualmente se llama "el teorema fundamental del Cálculo", que será explicado cuando tratemos del Cálculo infinitesimal.

Aparte de lo que Newton heredó de sus predecesores en ciencia y recibió del espíritu de su edad otros dos dones, una pasión teología y una insaciable sed por los misterios de la alquimia.

Censurarle por dedicar su inteligencia, no superada a estas cosas que podrían ser ahora consideradas indignas de su esfuerzo, sería censurarse a sí mismo. En los días de Newton la alquimia *era* la química, y de ella más tarde se desarrolló la química moderna. Newton, como hombre de espíritu científico ingénito, se dedicó a descubrir *por el experimento* lo que los alquimistas pretendían saber.

En lo que se refiere a la teología, Newton era un creyente en el Creador todopoderoso del Universo y en su propia incapacidad, como muchacho que se encuentra en la playa, para sondear todo el océano de verdades en todas sus profundidades. Por tanto, creyó que no solo habría muchas cosas en el Cielo más allá de su filosofía, sino otra multitud sobre la Tierra, y se prometió comprender por sí mismo lo que la mayoría de los hombres inteligentes de su tiempo aceptaban sin discusión (para ellos era tan natural como el sentido común): la narración tradicional de la Creación.

Se propuso, pues, realizar serios esfuerzos para intentar demostrar que las profecías de Daniel y la poesía del Apocalipsis tienen un sentido y realizar investigaciones cronológicas con objeto de armonizar las fechas del Antiguo Testamento con las de la Historia. En los días de Newton la teología era aún la reina de las ciencias y algunas veces presentaba sus turbulentos temas con un báculo de bronce y una cabeza de hierro fundido. Newton, sin embargo, permitió que su ciencia racional fluyera sobre sus creencias hasta el grado de hacer de él lo que ahora llamaríamos un unitario.

En junio de 1661, Newton ingresó en el Trinity College, de Cambridge un *subsizar* , un estudiante que (en aquellos días) pagaba sus gastos mediante servicios domésticos. La guerra civil, la restauración de la monarquía en 1661 y las adulaciones mal inspiradas a la Corona por parte de la Universidad, colocó a Cambridge a la altura más inferior que ha tenido en su historia como institución educativa cuando Newton ingresó en ella. De todos modos, el joven Newton, solitario al principio rápidamente se encontró a sí mismo, quedando absorbido en su labor.

El maestro de Newton en Matemática fue el doctor Isaac Barrow (1630-1677), un teólogo y matemático de quien se dice que, a pesar de su indiscutida originalidad y brillantez en la Matemática, tuvo la, desgracia de ser la estrella de la mañana, heraldo del sol de Newton. Barrow reconoció que alguien más grande que él había llegado y en el momento estratégico (1669) renunció su cátedra de Matemática en favor de su incomparable discípulo. Las conferencias sobre Geometría de Barrow se ocupan entre otras cosas de sus propios métodos para calcular áreas y trazar tangentes a curvas, que son esencialmente los problemas claves de los Cálculos integral y diferencial, respectivamente, y no puede haber duda alguna de que esas conferencias inspiraron a Newton sus trabajos.

La vida de Newton antes de graduarse es poco conocida. Parece que no hizo muy buena impresión a sus compañeros, y sus breves cartas, a su hogar no cuentan nada que interese. Los dos primeros años fueron empleados en el aprendizaje de la Matemática elemental. Si existe algún relato veraz de la repentina maduración de Newton como descubridor, ninguno de sus modernos biógrafos parecen haberlo encontrado. Aparte del hecho de que en los tres años 1664-66 (teniendo 21 a 22 años) estableció los fundamentos de su obra posterior en ciencias y Matemática, y que el incesante trabajo le produjo una enfermedad, nada seguro sabemos de él. La tendencia de Newton al secreto acerca de sus descubrimientos desempeñó también un papel para hacer mayor el misterio.

En su faceta puramente humana, Newton era suficientemente normal como para cometer algunos pecadillos antes de graduarse, y en su libro de apuntes se hace una alusión a diversas asistencias a la taberna y a la pérdida en dos partidas de naipes. Se graduó de B. A. (Bachiller en Artes) en enero de 1664.

La gran plaga (peste bubónica) de 1664-65 con su más moderada repetición en el siguiente año, dio a Newton la oportunidad de madurar su genio. La Universidad estaba cerrada y la mayor parte de estos dos años Newton se retiró a meditar en Woolsthorpe. Hasta entonces no había hecho nada notable, excepto haber estado enfermo por su demasiado asidua observación de un cometa y de los halos lunares, o si hizo algo fue en secreto. En estos dos años inventó el método de las fluxiones (el Cálculo), descubrió la ley de la gravitación universal y demostró experimentalmente que la luz blanca está compuesta de luz de todos los colores. Por entonces tenía 25 años.

Un manuscrito fechado el 20 de mayo de 1665 muestra que Newton, a la edad de 23 años, había desarrollado suficientemente los principios del Cálculo para poder encontrar la tangente y curvatura en cualquier punto de cualquier curva continua. Llamó a su método "fluxiones", de la idea de "fluir" o cantidades variables y sus razones de "flujo" o “crecimiento”. Su descubrimiento del teorema del binomio, un paso esencial hacia un cálculo completamente desarrollado, fue realizado de este modo.

El teorema general amplía los resultados particulares del siguiente modo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

y así sucesivamente, los cuales son encontrados utilizando el cálculo directo; de la siguiente forma:

$$(a+ab)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1*2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1*2*3}a^{n-3}b^3 + ...$$

donde los puntos indican que la serie se continúa de acuerdo con la misma ley seguida para los términos escritos; el término siguiente es:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1*2*3*4}a^{n-4}b^4$$

Si n es uno de los números enteros positivos 1, 2, 3 .... la serie termina automáticamente después de n + 1 términos precisamente. Esto es mucho más fácil de probar (como en el Algebra escolar) por inducción matemática.

Pero si n no es un número entero positivo la serie no termina, y esta demostración es inaplicable. Como una prueba del teorema del binomio para los valores fraccionarlos y negativos de n (como también para valores más generales), con una exposición de las restricciones necesarias para a, b, tan sólo se obtuvo en el siglo XIX, en este lugar nos limitaremos a decir que al ampliar el teorema a estos valores de *n*, Newton pensó que el teorema era correcto para todos los valores de *a, b*, como tuvo ocasión de considerar en su obra.

Si procediendo como si fuera el siglo XVII, hacemos caso omiso de los refinamientos modernos, será fácil ver cómo el Cálculo fue finalmente inventado. Las nociones fundamentales son las de *variable, función y límite*. Para aclarar esta última se empleó largo tiempo.

Una letra, por ejemplo s, que puede tornar diferentes valores durante el curso de una investigación matemática se denomina una *variable*; por ejemplo, s es una variable si denota la altura de un cuerpo que cae hacia la tierra.

La palabra *función* (o su equivalente latino) parece que fue introducida en la Matemática por Leibniz en 1694; el concepto domina ahora gran parte de la Matemática y es indispensable en la ciencia. Desde el tiempo de Leibniz el concepto ha sido precisado. Si *y* y *x*, son dos variables tan relacionadas que siempre que se asigne un valor numérico a *x*, se determina un valor numérico de *y*, entonces *y* se llama función uniforme de *x*, y esto se simboliza escribiendo y *= f(x)*.

En lugar de intentar dar una definición moderna de *límite*, nos concentraremos con uno de los más simples ejemplos de ese tipo que condujo a los continuadores de Newton y Leibniz (del primero especialmente) al uso de los límites al discutir la razón del cambio. Para los primeros que desarrollaron el Cálculo, las nociones de variable y límite fueron intuitivas; para nosotros son conceptos extraordinariamente sutiles protegidos por la etiqueta de misterios semimetafísicos, referentes a la naturaleza de los números, racionales e irracionales.

Supongamos que *y* es una función de *x*, o sea, *y = f(x)*. *La razón del cambio de* y *con respecto* a x, o, como se dice, la *derivada de* y con *respecto* a x, se define del siguiente modo. Se da a *x* cualquier incremento, es decir ?*x* (léase "incremento de *x*"), de modo que *x* sea *x* + ?*x; y f(x)* o y, sea *f(x* + ?*x*). El incremento correspondiente, ?*y* de *y* es su nuevo valor menos su valor inicial; o sea, ?*y = f (x* +?*y) - f(x)*.

Como una relativa aproximación a la razón del cambio de *y* con respecto a *x* podemos considerar, por nuestro concepto intuitivo de una razón como un "promedio", el resultado de dividir el incremento de y por el incremento de *x* o sea:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pero esto es sin duda demasiado tosco, pues tanto *x* como *y* varían, y no podemos decir que este promedio represente la razón de *cualquier valor* particular de *x*. En consecuencia, disminuimos el incremento ?*x* indefinidamente, hasta que en "el límite" ?*x* se acerque a cero, y se sigue el "promedio" $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a través de todo el proceso: del mismo modo ?*y* disminuye indefinidamente, y por último se acerca a cero; pero $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no se nos presenta, por tanto, con el símbolo sin sentido $\frac{0}{0}$, sino con un *valor límite* definido, que es la razón pedida del cambio de *y* con respecto a *x*.

Para ver cómo se resuelve el problema supongamos que *f(x)* sea la función particular x^2, de modo que $y = x^2$. Siguiendo el procedimiento anterior tendremos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

Nada se dice, sin embargo, acerca de los límites. Simplificando la ecuación anterior, tendremos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

y simplificando la ecuación en el mayor grado posible, supongamos *ahora* que ? x se acerca a cero; veremos que el valor límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es $2x$, y en general, si $y = x^n$, el valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ será nx^{n-1} como se puede demostrar por el teorema del binomio.

Tal razonamiento no satisfará a un estudioso de hoy día, pero no podían hacer nada mejor los inventores del Cálculo, y ahora tendremos que conformarnos, si $y = f(x)$, *el valor* límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (siempre que tal valor exista) se denomina la *derivada de y con respecto a x*, y se nota por $\frac{dy}{dx}$. Este simbolismo es debido esencialmente a Leibniz y es el que hoy se usa más; Newton usaba otro (y) que es menos conveniente.

Los ejemplos más sencillos de razón en Física son la velocidad y la aceleración, dos de los conceptos fundamentales de la dinámica. La velocidad es la razón del cambio de *distancia* (o "posición" o "espacio"), con respecto al tiempo. La aceleración es la razón del cambio de *veloci*dad con respecto al *tiempo.* Si s designa la distancia recorrida en el tiempo t por una partícula en movimiento (aceptando que la distancia es función del tiempo), la velocidad en el tiempo t, es $\frac{ds}{dt}$. Designando esta velocidad por v, tendremos la aceleración correspondiente, $\frac{dv}{dt}$.

Esto introduce la idea de una razón de razón o de una *derivada segunda*. En el movimiento acelerado, la velocidad no es constante, sino variable, y de aquí que tenga una razón de cambio: la aceleración es la razón de cambio de la razón, de cambio de la distancia (ambas razones con respecto al tiempo); y para indicar esta segunda razón o "razón de razón", escribimos $\frac{d^2 s}{dt^2}$ para la aceleración. Esto puede tener una razón de cambio con respecto al tiempo; esta *tercera* razón se escribe $\frac{d^3 s}{dt^3}$. Y así para la cuarta, quinta... razones, o sea para la cuarta, quinta... derivadas. Las derivadas más importantes en las aplicaciones del Cálculo a la ciencia son la primera y la segunda.

Si ahora volvemos a ocuparnos de lo que dijo Newton respecto de la *segunda ley del movimiento,* y lo comparamos con lo dicho para la aceleración, vemos que las "fuerzas" son proporcionales a las aceleraciones que producen. De este modo podemos establecer la ecuación *diferencial* en un problema que no es en modo alguno sencillo: el de las "fuerzas centrales"; una partícula es atraída hacia un punto fijo por una fuerza cuya dirección pasa siempre a través del punto fijo. Puesto que la fuerza varía como una función de la distancia s, o sea como *F(s)*, donde *s* es la distancia de la partícula en el tiempo *t*, desde e punto fijo O,

Figura 6.2

se requiere para describir el movimiento de la partícula. Una ligera consideración mostrará que

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -F(s)$$

habiendo sido empleado el signo menos porque la atracción disminuye la velocidad. Ésta es la *ecuación diferencial* del problema, así llamado debido a que comprende una razón, (la aceleración) y las razones (o derivadas) son el objeto de la investigación en el Cálculo *diferencial.*

Habiendo reducido el problema a una ecuación diferencial, tenemos que resolver ahora esta ecuación, es decir, encontrar la relación entre *s* y *t*, o, en lenguaje matemático, resolver la ecuación diferencial expresando *s* en función de *t*. Aquí comienza la dificultad. Puede ser muy fácil traducir una situación física determinada a una serie de ecuaciones diferenciales que ningún matemático puede resolver. En general, todo problema esencialmente nuevo en Física conduce a tipos de ecuaciones diferenciales que exigen la creación de nuevas ramas de la Matemática para su solución. La ecuación particular anterior puede, sin embargo, resolverse muy simplemente por medio de funciones elementales si $F(s) = \frac{1}{x^2}$, como en la ley de la atracción gravitacional de Newton. En lugar de detenernos en esta ecuación particular consideraremos otra mucho más sencilla que bastará para aclarar este punto importante:

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Se ha admitido que *y* es función de *x*, cuya derivada es igual a *x;* así se exige para expresar *y* como función de *x*. Consideremos en la misma forma de un modo más general

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

lo que plantea la pregunta: ¿Cuál es la función *y* de *x* cuya derivada (razón de cambio) con respecto a *x* es igual a *f(x)?* Siempre que podamos encontrar la función pedida (o siempre que tal función exista) la llamaremos la *antiderivada (primitiva) de f(x),* y la notaremos por $\int f(x)dx$, por una razón que pronto se comprenderá. Por el momento tan sólo necesitamos observar que $\int f(x)dx$ simboliza una función (sí existe) cuya *derivada es* igual a *f(x).*

Por simple inspección vemos que la primera de las ecuaciones mencionadas tiene la solución $\frac{1}{2}x^2 + c$, donde *c* es una constante (el número no depende de la variable *x*); así que $\int f(x)dx = \frac{1}{2}x^2 + c$.

Hasta este simple ejemplo puede indicar que el problema de calcular $\int f(x)dx$ para funciones de aspecto relativamente inocente f(x), puede estar más allá de nuestra capacidad. No hay que deducir que exista una "respuesta" en funciones conocidas cuando una *f(x)* se elige al azar, pues las posibilidades contra tal probabilidad son un infinito de la peor clase ("no numerables" uno a uno). Cuando un problema, físico conduce a una de estas pesadillas se aplican métodos aproximados que dan el resultado dentro de la exactitud deseada.

Con los dos conceptos básicos $\frac{dy}{dx} = f(x)$ y $\int f(x)dx$, del Cálculo infinitesimal podemos abordar ahora el *teorema fundamental del Cálculo* que los relaciona. Por simplicidad, usaremos una figura, aunque no es necesario.

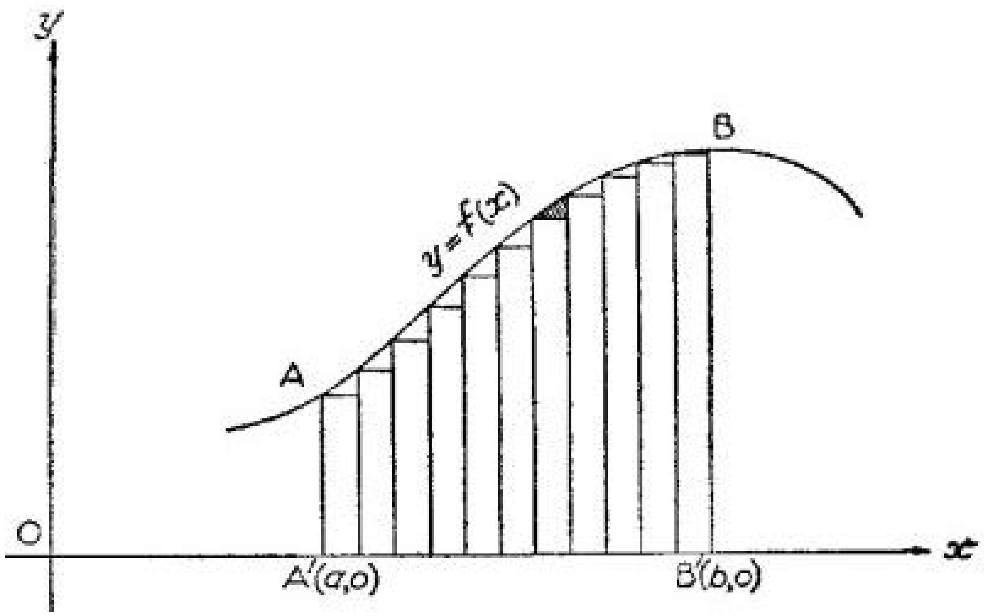


Figura 6.3

Consideremos una curva continua no cerrada cuya ecuación es *y = f(x)* en coordenadas cartesianas. Hay que encontrar el área comprendida entre la curva, el eje *x* y las dos perpendiculares *AA', BB'*, trazadas al eje de las *x* desde dos puntos *A, B,* de la curva. Las distancias *OA', OB'* son *a, b,* respectivamente, llamadas coordenadas de *A', B',* que son *(a, o), (b, o).* Procedamos como Arquímedes hizo, dividiendo el área pedida en fajas paralelas de igual anchura, considerando estas fajas como rectángulos, despreciando los fragmentos triangulares superiores, (uno de los cuales está sombreado en la figura), sumando las áreas de todos estos rectángulos, y finalmente *calculando el límite de esta* suma cuando el número de rectángulos aumenta indefinidamente. Hasta ahora no hay dificultad, pero ¿cómo calcularemos el límite?,

La respuesta es seguramente una de las cosas más asombrosas que un matemático puede descubrir.

Primero se encuentra $\int f(x)dx$. Supongamos que el resultado sea *F(x).* Si se sustituye *x* por *a* y *b*, tendremos *F (a),* y *F(b).* Ahora se resta el primero del segundo, *F(b) - F(a). Ésta es el área buscada.* Obsérvesela relación entre *y = f(x),* la ecuación de la curva dada; $\frac{dy}{dx} = f(x)$ que (como vimos en el capítulo sobre Fermat) da la inclinación da la inclinación de la tangente a la curva en un punto cualquiera (*x, y*); $\int f(x)dx$ o *F(x)* es la función cuya razón de cambio con respecto a *x* es igual *f(x).* Hemos admitido que el *área* pedida, que es una *suma límite* del tipo explicado al ocuparnos de Arquímedes, está dada por *F(b) - F(a).* Así hemos relacionado *inclinaciones* o *derivadas* con *sumas-límites* , o como se denominan, *integrales definidas*. El símbolo ? es una S antigua, la letra primera de la palabra *summa*.

Poniendo todo esto en símbolos, escribimos para el área en cuestión $\int_a^b f(x)dx$; *a* es el límite *inferior* de la suma, b el límite *superior;* y

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

en la que *F(b), F(a)* se calculan valorando la *"integral indefinida"* $\int f(x)dx$, o sea, hallando la función F(x), tal que su derivada con respecto a *x*, $\frac{dF(x)}{dx}$ es igual a *f (x).* Éste es el teorema fundamental del Cálculo como se presentó en su forma geométrica a Newton y también independientemente a Leibniz. Repetiremos que no han sido tenidos en cuenta numerosos refinamientos exigidos en una exposición moderna.

Dos sencillas pero importantes cuestiones pondrán punto final a este resumen de los conceptos principales del Cálculo formulado por los precursores. Hasta ahora sólo hemos considerado funciones de una sola variable, pero la naturaleza nos presenta funciones de varias variables y hasta de infinitas variables.

Para citar un ejemplo muy sencillo, el volumen *V* de un gas es una función de su temperatura *T* y la presión *P* sobre él; o sea *V = F(T,P):* la forma real de la función *F* no es necesario que sea especificada. Cuando *T, P,* varían, *V* varía. Pero supongamos que sólo una, *T* o *P,* varía, mientras la otra permanece constante. Nos encontramos ahora con una función de una variable, y la derivada de *F(T, P)* puede ser calculada con respecto a esa variable. Si *T* varía mientras *P* permanece constante, la derivada de *F(T, P)* con respecto a *T* se llama la *derivada* parcial (con respecto a *T*), y para mostrar que la variable *P* permanece constante, se usa un símbolo diferente,, para esta derivada parcial. De igual modo, si *P* varía mientras *T* permanece constante, tendremos $\frac{\partial F(T,P)}{\partial P}$. Precisamente como en el caso de derivadas ordinarias segunda, tercera,... tendremos el equivalente para las derivadas parciales; así $\frac{\partial^2 F(T,P)}{\partial T^2}$ significa la derivada parcial de $\frac{\partial F(T,P)}{\partial T}$ con respecto de *T*.

La gran mayoría de las ecuaciones importantes de la Física matemática son ecuaciones *diferenciales parciales.* Un ejemplo famoso es el de la ecuación de Laplace o la "ecuación de continuidad", que aparece en la teoría newtoniana de la gravitación, en la de la electricidad, magnetismo, movimiento de los fluidos etc.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

En el movimiento de los fluidos esta es la expresión matemática de que un fluido "perfecto" en el que no hay remolinos, es indestructible. Una derivada de esta ecuación estaría fuera de lugar aquí, pero una explicación de lo que significa puede hacerla menos misteriosa. Si no hay remolinos en el fluido, las tres velocidades componentes paralelas a los ejes de x, y, z de cualquier partícula en el fluido son calculables como las derivadas parciales

$$-\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$-\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$-\frac{\partial u}{\partial z}$$

de la misma función u, que será determinada por el tipo particular del movimiento. Combinando este hecho con la observación de que si el fluido es incompresible e indestructible debe salir tanto fluido de cualquier pequeño volumen en un segundo como fluye dentro de él, y observando que la cantidad de flujo que atraviesa en un segundo cualquier área pequeña es igual a la razón de flujo multiplicado por el área, veremos (combinando estas observaciones y calculando el flujo total que entra y que sale) que la ecuación de Laplace es una verdadera perogrullada.

Lo realmente asombroso de esta ecuación y de algunas otras de la Física matemática es que una perogrullada física, cuando es sometida a razonamientos matemáticos, proporciona datos imprevistos que no son perogrulladas. Las "anticipaciones" de los fenómenos físicos mencionadas en capítulos anteriores surgen de estos lugares comunes tratados matemáticamente.

Sin embargo, aparecen dos verdaderas y grandes dificultades en problemas. El primero se refiere al físico, que debe tener en cuenta las complicaciones que pueden ser excluidas de su problema sin mutilarlo en forma que impida todo reconocimiento, para que pueda ser tratado matemáticamente. La segunda se refiere al matemático, y ésta nos lleva a una cuestión de gran importancia, la última que mencionaremos en este resumen del Cálculo, la de los llamados problemas del *valor* límite.

La ciencia no plantea a los matemáticos ecuaciones como la de Laplace exigiéndoles que encuentren la solución general. Lo que desea es algo que suele ser mucho más difícil de obtener y es una solución particular que no sólo satisfaga la ecuación, sino que *además satisfaga ciertas condiciones auxiliares* dependientes del problema particular de que se trate.

La cuestión puede ser ilustrada por un problema sobre la conducción del calor. Existe una ecuación general (la de Fourier) para el "movimiento" del calor en un conductor, análoga a la de Laplace para el movimiento de los fluidos. Supongamos que se necesita encontrar la distribución final de la temperatura en una barra cilíndrica cuyos extremos se mantienen a una temperatura constante y cuya superficie curvada se mantiene a otra temperatura; la "final" significa que existe un "estado continuo" sin cambio ulterior de temperatura en todos los puntos de la barra. La solución no sólo debe satisfacer la ecuación general, sino que también debe explicar las temperaturas *de superficie* o las condiciones límites iniciales. Lo segundo es lo más difícil. Para una barra cilíndrica, el problema es muy diferente del que corresponde a una barra de sección rectangular. La teoría de los *problemas de valor-límite* tiene por objeto ajustar las soluciones de las ecuaciones diferenciales a condiciones iniciales prescritas. Esto ha sido creación de los últimos ochenta años. En cierto sentido la Física matemática es contemporánea de la teoría de los problemas de *valor-límite.*

La segunda de las grandes inspiraciones de Newton cuando tenía 22 ó 23 años (año 1666), estando en Woolsthorpe, fue su ley de la gravitación universal (ya expuesta). A este respecto no repetiremos la conocida historia de la manzana, y para variar la monotonía del relato clásico, expondremos la versión de Gauss cuando nos ocupemos de él.

La mayor parte de los autores aceptan que Newton hizo algunos cálculos aproximados en 1666 (teniendo 23 años), para ver si su ley de la gravitación universal podía explicar las leyes de Kepler. Algunos años más tarde (en 1684), cuando Halley le preguntó qué ley de la atracción explicaría las órbitas elípticas de los planetas, Newton replicó inmediatamente que la razón inversa de los cuadrados. “¿Cómo lo sabéis?", preguntó Halley, quien había sido incitado por Sir Christofer Wren y otros autores a plantear la cuestión, como un gran argumento acerca del problema debatido durante algún tiempo en Londres.

“Porque lo he lo he calculado", replicó Newton. Al intentar repetir su cálculo, Newton cometió un error y creyó que estaba equivocado. Pero luego encontró el error y comprobó su conclusión original.

Se ha dicho que el retraso de 20 años en la publicación de la ley de gravitación universal fue una inmerecida contrariedad debida a datos inexactos. En este lugar preferiremos la menos romántica, pero la más matemática de las tres explicaciones que se han dado.

La demora de Newton se relaciona con su incapacidad para resolver cierto problema del Cálculo integral que era crucial para toda la teoría de la gravitación universal expresada en la ley newtoniana. Antes de que pudiera explicar tanto el movimiento de la manzana como el de la Luna, Newton tenía que encontrar la atracción total de una esfera homogénea sólida sobre cualquier partícula fuera de la esfera. *"Todas* las partículas de la esfera atraen la partícula fuera de ella con una fuerza que está en razón directa del producto de las masas de las dos partículas, e inversa del cuadrado de la distancia entre ellas. ¿Cómo se componen o se suman en la atracción resultante todas estas diferencias y atracciones infinitas en número?

Esto es sin duda un problema de Cálculo integral. Actualmente se cita a los manuales como un ejemplo que los estudiantes deben resolver en 20 minutos o menos y, sin embargo, Newton empleó veinte años. Finalmente lo resolvió: la atracción es la misma, como si toda la masa de la esfera estuviera reunida en un solo punto: en su centro. El Problema se reduce, pues, a encontrar la atracción entre dos partículas separadas a cierta distancia, y la solución inmediata de esto es la enunciada en la ley de Newton. Si esta es la correcta explicación de la demora de 20 años, podrá darnos cierta idea de la enorme labor que generaciones de matemáticos desde los días de Newton han realizado para desarrollar y simplificar el Cálculo, hasta el punto de que hoy pueda usarlo sin dificultad un muchacho de 16 años.

Aunque nuestro interés principal por Newton se centra en su talento como matemático, no podemos abandonarle con su obra maestra no desarrollada del año 1666. Hacer esto no daría idea de su grandeza, y debemos trazar un breve esquema de sus restantes actividades, sin entrar en detalles por falta de espacio.

Después de su regreso a Cambridge, Newton fue elegido miembro del Trinity en 1667, y en 1669 teniendo 26 años, sucedió a Barrow como profesor lucasiano de Matemática. Sus primeras lecciones se refirieron a la óptica. En ellas expuso sus descubrimientos y bosquejó su teoría corpuscular de la luz, según la cual la luz consiste en una emisión de corpúsculos y no es un fenómeno ondulatorio, como Huygens y Hooke suponían. Aunque las dos teorías parecen ser contradictorias, ambas son útiles actualmente para explicar los fenómenos de la luz, y se reconcilian en un sentido puramente matemático en la moderna teoría de los cuantos. Por tanto, no es correcto decir, como se decía hace años, que Newton estuviera completamente equivocado con su teoría corpuscular.

El año siguiente 1668, Newton construyó un telescopio de reflexión con sus propias manos, y lo utilizó para observar los satélites de Júpiter. Se proponía comprobar si la gravitación universal era realmente universal observando los satélites de Júpiter. Este año es también memorable en la historia del Cálculo. Los cálculos de Mercator por medio de series infinitas del área de la hipérbola atrajeron la atención de Newton. El método era prácticamente idéntico al suyo, que no había todavía publicado, pero que comunicó al Dr. Barrow y que circuló entre algunos de los mejores matemáticos.

Al ser elegido miembro de la Royal Society en 1672, Newton comunicó sus trabajos sobre los telescopios y su teoría corpuscular de la luz. Una comisión de tres miembros, que incluía al pendenciero Hooke, fue reunida para que informara acerca de los trabajos sobre óptica. Abusando de su autoridad como juez, Hooke se aprovechó de la oportunidad para hacer propaganda de la teoría ondulatoria y de sí mismo a expensas de Newton. Al principio Newton permaneció frío y en actitud científica ante la crítica, pero cuando el matemático Lukas y el médico Linus, ambos de Lieja, se unieron a Hooke y añadieran nuevas sugestiones y objeciones, que cambiaron la crítica legítima por otra capciosa y simplemente estúpida, Newton comenzó a perder la paciencia.

Una lectura de su correspondencia en la primera de sus violentas controversias podrá convencer de que Newton era celoso de sus descubrimientos. El tono de sus cartas cambia gradualmente desde su deseo de aclarar las dificultades que otros encuentran, hasta el asombro provocado por el hecho que los científicos puedan considerar a la ciencia cono un campo de batalla de sus querellas personales. De este asombro pasa rápidamente a una ira fría y a una resolución algo infantil de actuar por sí mismo en el futuro. No puede sufrir tranquilamente las necedades maliciosas.

Finalmente, en una carta fechada el 18 de noviembre de 1676, dice: “Veo que he hecho de mí un esclavo de la filosofía, pero si me veo libre del asunto de Mr. Lukas, me despediré para siempre de ella, salvo que me dedique en esa actividad para mi satisfacción privada. Veo que un hombre o no debe plantear nada nuevo, o tendrá que ser un esclavo para defenderlo". Sentimientos casi idénticos fueron expresados por Gauss en relación con la Geometría no-euclidiana.

La petulancia de Newton ante la crítica y su exasperación por las vanas controversias estalló después de la publicación de los *Principia*. Escribiendo a Halley el 20 de junio de 1688, dice: "La filosofía [la ciencia] es una dama impertinente y litigiosa, y un hombre, para estar en relaciones con ella, tiene que verse envuelto en pleitos. Lo vi desde un principio, y ahora no estoy muy dispuesto a acercarme, pues ella, me lo advierte". La Matemática, la dinámica y la mecánica celeste, fueron en efecto, podemos admitirlo, intereses secundarios para Newton. Su corazón estaba en la alquimia, en sus investigaciones en cronología y en sus estudios teológicos,

Fue tan solo impulso interno el que le lanzó, como una diversión, a la Matemática, y en el año 1679, teniendo 37 años (cuando también tenía planteadas seguramente en su cabeza o sobre su mesa sus descubrimientos e invenciones esenciales), escribió al pestilente Hooke. "Durante los últimos años me he esforzado por pasar de la filosofía a otros estudios, y no volveré a ellos a no ser que lo haga por diversión en algunas horas de descanso". Estas "diversiones" le sumieron, algunas veces en una meditación más profunda que sus labores confesadas, como cuando cayó gravemente enfermo por pensar día y noche en el movimiento de la Tierra, el único problema, que según dicen, le provocó dolor de cabeza.

Otra faceta de la susceptibilidad de Newton se muestra en la primavera de 1673, cuando escribió a Oldenburg renunciando a ser miembro en la Royal Society. Esta petulante acción ha sido diversamente interpretada. Newton daba como razones las dificultades financieras y la distancia que le separaba de Londres. Oldenburg, tomando al pie de la letra las palabras del matemático, le respondió que podía conservar su categoría de miembro sin pagar. Mientras tanto Newton recobró su serenidad y retiró su renuncia. Cierto es que pasó épocas de dificultades económicas, pero sus finanzas mejoraron. Haremos notar aquí que Newton no era un soñador de pensamiento ausente cuando se trataba de dinero. Era extraordinariamente astuto y llegó a enriquecerse. Pero aunque astuto y económico fue también muy liberal con su dinero, y estuvo siempre dispuesto a ayudar a los amigos en caso de necesidad tan generosamente corno le era posible. Para los jóvenes era particularmente generoso.

Los años 1684-86 marcan una de las grandes épocas en la historia del pensamiento humano. Incitado hábilmente por Halley, Newton consintió al fin redactar para su publicación sus descubrimientos astronómicos y dinámicos. Probablemente ningún mortal ha pensado tan profundamente y con tanta intensidad como Newton lo hizo para escribir sus *Philosophiae Naturalís Principia Mathematica* (Principios matemáticos de filosofía natural). Sin cuidarse de su salud física, Ncwton pareció olvidarse de que tenía un cuerpo que necesitaba alimentarse y dormir, cuando se entregó a la composición de su obra maestra. Renunciaba a comer, y, después de dormir el menor tiempo posible, se sentaba semivestido durante horas, en el borde del lecho, para sumergirse en los laberintos de su matemática. En 1686, los Principia fueron presentados en la Royal Society, y en 1687 fueron impresos a expensas de Halley.

No podemos hacer aquí una descripción del contenido de los Principia, pero podemos resumir brevemente los inagotables tesoros que esta obra contiene. El espíritu que anima toda la obra es la dinámica de Newton, su ley de la gravitación universal y la aplicación de ambas al sistema solar, "el sistema del mundo". Aunque el Cálculo deja paso a la demostración geométrica sintética, Newton afirma (en una carta) que lo utilizó para obtener sus resultados, y luego procedió a revisar en la forma geométrica las pruebas proporcionadas por el cálculo, de modo que sus contemporáneos pudieran comprender más fácilmente el tema principal: la armonía dinámica de los cielos.

En primer término, Newton dedujo las leyes empíricas de Kepler basándose en su propia ley de la gravitación, y demostró cómo puede ser calculada la masa del Sol, y también cómo puede ser determinada la masa de un planeta que tenga un satélite. En segundo lugar inició la teoría extraordinariamente importante de las perturbaciones: la Luna, por ejemplo, no es sólo atraída por la Tierra, sino también por el Sol; de aquí que la órbita de la Luna será perturbada por la atracción del Sol. En esta forma Newton explicó dos antiguas observaciones, debidas a Hiparco y Ptolomeo. Nuestra propia generación ha visto ahora completamente desarrollada la teoría de las perturbaciones aplicada a las órbitas electrónicas, particularmente para el átomo del helio. Aparte de estas antiguas observaciones, otras siete irregularidades del movimiento de la Luna observadas por Tycho Brahe (1546-1601), Flamsteed (1646-1719) y otros autores, fueron deducidas de la ley de la gravitación. Esto por lo que se refiere a las perturbaciones lunares. Lo mismo puede decirse también de los planetas. Newton comenzó la teoría de las perturbaciones planetarias que en el siglo XIX iba a conducir al descubrimiento del planeta Neptuno, y en el siglo XX al de Plutón.

Los "sin ley", que aun son considerados como advertencias del cielo por los ojos supersticiosos, fueron colocados bajo la ley universal como miembros inocuos de la familia del Sol, con tal precisión que ahora calcularnos su retorno para darles la bienvenida (a no ser que Júpiter o algún otro planeta lo impida) tal como hicimos en 1910 cuando el bello cometa de Halley volvió a presentarse después de una ausencia de 74 años.

Newton comenzó el vasto y aun incompleto estudio de la evolución planetario, calculando (basándose en su dinámica y en la ley universal) el aplastamiento de la Tierra en sus polos debido a la rotación, y demostró que la forma de un planeta determina la longitud de su día, de modo que si conocemos exactamente cómo se aplasta Venus en los polos podremos decir cuánto tarda en completar su giro alrededor del eje que los une. Calculó la variación del peso según la latitud. Demostró que una cáscara hueca, limitada por superficies esféricas concéntricas, y homogénea no ejerce ninguna fuerza sobre un pequeño cuerpo colocado en el interior de ella. Esto tiene consecuencias importantes en electrostática, y también en el reino de la ficción como base de experimentos físicos que sirven de entretenimiento.

La precesión de los equinoccios fue bellamente explicada por la atracción de la Luna y el Sol sobre la curvatura ecuatorial de la Tierra, que da lugar a que nuestro planeta oscile como una peonza. Las misteriosas mareas cayeron también dentro del gran esquema; fueron calculadas tanto las mareas lunares como las solares, y pudo deducirse la masa de la Luna, observando las alturas de las mareas vivas y muertas. El primer libro establece los principios de la dinámica. El segundo, el movimiento de los cuerpos en los medios resistentes, y el movimiento de los fluidos; el tercero es el famoso "Sistema del Mundo".

Probablemente ninguna ley de la naturaleza ha sido tan sencillamente unificada como lo fue la ley de Newton de la gravitación universal en sus Principia. Es mérito de los contemporáneos de Newton haber reconocido, al menos vagamente, la magnitud de su obra, aunque pocos podrían seguir el razonamiento en cuya virtud fue logrado el estupendo milagro de la unificación, que transformó al autor de los Principia en un semidiós. Antes de que pasaran muchos años, el sistema newtoniano fue enseñado en Cambridge (1699) y en Oxford, (1704). Francia quedó aletargada durante medio siglo por los angélicos "torbellinos" de Descartes, pero una vez repuesta, el misticismo dio paso a la razón. y Newton encontró su máximo sucesor no en Inglaterra, sino **en** Francia, donde Laplace se dedicó a la tarea de continuar y completar los *Principia*.

Después de los Principia el resto es el anticlímax. Aunque la teoría lunar continuó incitándole y "recreándole", Newton cayó temporalmente enfermo de "Filosofía" y aprovechó la oportunidad para dirigirse a asuntos menos celestiales. Jacobo II, obstinado escocés y fanático católico, pretendió obligar a la Universidad a conceder el grado de maestro a un benedictino, a pesar de las protestas de las autoridades académicas. Newton era uno de los delegados que en 1687 fue a Londres para presentar el caso de la Universidad ante el Tribunal presidido por un tunante jurisconsulto: el Grand Lord Canciller George Jeffreys: “el infame Jeffreys" como es conocido en la historia. Después de haber insultado al presidente de la delegación orgullosamente, Jeffreys despidió a los restantes con la orden de proceder sin tardanza. Newton se mantuvo al parecer tranquilo. Nada se ganaba con responder a un liebre como Jeffreys en su propio tono. Pero cuando los demás iban a firmar un deshonroso compromiso, Newton se interpuso y evitó que firmasen. Nada de valor se había perdido ni menos el honor. "Un valor honrado en estas cuestiones, escribía más tarde Newton, asegurará todo, estando la razón de nuestra parte".

Cambridge apreció, sin duda, el valor de Newton, pues en enero de 1689 le eligió para representar a la Universidad en la Convención Parlamentaria, después de que Jacobo II huyó del país, para dejar paso Guillermo de Orange y su esposa Mary, y de que el fiel Jeffreys tuvo que ocultarse para escapar a la rápida justicia del populacho. Newton se sentó en el Parlamento hasta su disolución en febrero de 1690. En honor suyo diremos que no pronunció ningún discurso, pero fue fiel a su cargo y no se mostró buen político. Su diplomacia tuvo mucho que hacer para mantener leal al Rey y a la Reina la turbulenta Universidad.

El gusto por la "vida real" en Londres pudo arruinar la labor científica de Newton. Los amigos influyentes y oficiosos, incluyendo el filósofo John Locke (1632-1704), autor del famoso *Human Understanding*, convenció a Newton de que no debía negarse a participar en los honores. La imbecilidad máxima de la raza anglosajona es su estúpida creencia de que los cargos públicos o las posiciones administrativas, constituyen el honor supremo para un hombre inteligente. Los ingleses, finalmente (1699), nombraron a Newton director de la Casa de la Moneda para reformar y dirigir el sistema monetario del reino. Este paso de lo sublime a lo ridículo, alcanza su máximo en el comentario de Sir David Brewster (1860) acerca del "bien merecido reconocimiento" que obtuvo del pueblo inglés el genio de Newton. Como es natural, si Newton realmente deseaba algún nombramiento de este tipo, tenía derecho a conseguir lo que quisiera, pero sus amigos intrigantes no debían incitarle a ello.

Veamos cómo sucedió. Charles Montagu, más tarde conde de Halifax, miembro del Trinity College y amigo íntimo de Newton, ayudado e incitado por el charlatán e intrigante Samuel Pepys (1633-1703) de pública notoriedad, movidos a su vez por Locke y por Newton mismo, comenzaron a tender los puentes para que Newton obtuviera un reconocimiento "digno" de él.

Es evidente que las negociaciones no se realizaron siempre con facilidad, y el temperamento algo suspicaz de Newton le llevó a creer que algunos de sus amigos estaban jugando con él, como probablemente ocurría. El insomnio y la indiferencia por el alimento, que le capacitaron para escribir los Principia en diez y ocho meses, se vengaron de él. En el otoño de 1692 (cuando tenía casi cincuenta años y podía estar en lo mejor de su vida), Newton cayó gravemente enfermo. La repugnancia por el alimento y su insomnio casi total, agravados por una temporal manía persecutoria, le llevaron a un estado peligroso cercano al colapso mental total. Una patética carta de 16 de septiembre de 1693, que escribió a Locke, después de su restablecimiento, muestra que había estado muy enfermo.

Señor:
Pensando que queríais embrollarme con mujeres y por otros medios[1] *me sentí tan afligido que cuando me dijeron que estabais enfermo y que no viviríais, respondí: sería mejor que muriera. Deseo que me perdonéis por esta falta de caridad. Ahora estoy convencido de que lo que habéis hecho es justo, y os pido perdón por haber abrigado malos pensamientos, por haber dicho que atacabais la raíz de la moralidad en un principio establecido en vuestro libro de moral, que pensabais continuar en otro libro, y por haber afirmado que erais partidario de Hobbes. También os pido Perdón por haber dicho o pensado que había existido el propósito de comprarme por un cargo o embrollarme.*
Vuestro más humilde y desgraciado servidor.

Isaac Newton

Las noticias de la enfermedad de Newton se extendieron por el continente, donde, como es natural se exageraron mucho. Sus amigos, incluyendo uno que habría de ser más tarde su más amargo enemigo, se regocijaron por este restablecimiento. Leibniz escribía a un amigo expresándole su satisfacción por el hecho de que Newton hubiera sanado. Pero el mismo año de su restablecimiento (1693), Newton oyó decir por primera vez que el Cálculo infinitesimal era bien conocido en el continente y que era atribuido comúnmente a Leibniz.

La década después de la publicación de los Principia fue dividida entre la alquimia, la teología y los pesares, con incursiones más o menos involuntarias a la teoría lunar. Newton y Leibniz se hallaban aún en términos cordiales. Sus "amigos" respectivos, completamente ignorantes de las Matemáticas en general y del Cálculo en particular, no habían aún empujado a uno contra el otro para que se acusaran de plagiarios en la invención del Cálculo, y hasta de otras cosas peores, en la querella más vergonzosa acerca de la prioridad que registra la historia de la Matemática. Newton reconocía los méritos de Leibniz, Leibniz reconocía los de Newton, y en esta fase pacífica de su amistad ninguno pensó, ni por un momento, que el otro le hubiera robado la más mínima idea acerca del Cálculo infinitesimal.

Más tarde, en 1712, cuando el hombre de la calle, el celoso patriota que no sabe nada de los hechos, se dio vaga cuenta de que Newton había hecho algo extraordinario en el campo de la Matemática, (más que lo que había sido, hecho en todo el tiempo anterior a él, según decía Leibniz), la cuestión respecto a quién inventó el Cálculo, constituyó una cuestión de celos nacionales, y todo inglés culto tuvo que alistarse tras de su campeón, afirmando que su rival era un estafador y un embustero.

Al principio Newton no tuvo culpa alguna, ni tampoco la tuvo Leibniz. Pero a medida que se afirmaba el instinto deportivo británico, Newton se dispuso al ataque, y él mismo sugirió o consintió que se proyectasen sombras acerca de la falta de honradez con que se procedía para obtener el título de campeón internacional a cualquier costa. Leibniz y sus partidarios hicieron lo mismo. La consecuencia de todo esto fue que la obstinada Inglaterra vio marchitarse la Matemática durante todo un siglo después de la muerte de Newton, mientras que Suiza y Francia, más progresivas, siguieron la dirección de Leibniz y desarrollaron su incomparablemente mejor y más sencilla forma de *escribir* el Cálculo,

[1] Se había murmurado que la sobrina favorita de Newton se habría aprovechado de sus encantos para favorecer los nombramientos de Newton.

perfeccionaron la cuestión y la hicieron sencilla, aplicándola fácilmente a diversas investigaciones, cosa que los inmediatos sucesores de Newton debían haber tenido el honor de hacer.

En 1696, teniendo 54 años, Newton fue nombrado administrador de la Casa de la Moneda. Su tarea era reformar el sistema monetario. Habiéndolo hecho así, fue ascendido en 1699 al cargo de Director. La única satisfacción que pueden tener los matemáticos en esta degradación de la suprema inteligencia de Newton es la refutación que proporciona a la necia superstición de que los matemáticos no tienen sentido práctico. Newton fue uno de los mejores Directores de la Casa de la Moneda que ha habido, pues se entregó seriamente a su tarea.

En 1701-1702 Newton volvió a representar a la Universidad de Cambridge en el Parlamento, y en 1703 fue elegido Presidente de la Royal Society, cargo honroso para el que fue reelegido repetidas veces, hasta su muerte en 1727. En 1705 fue nombrado caballero por la reina Ana. Probablemente este honor se debió a sus servicios corno Director de la Casa de la Moneda más que al reconocimiento de su posición en el templo de la sabiduría. Podríamos plantearnos la siguiente cuestión: si una cinta colgada al cuello es el premio para un político intrigante, ¿por qué un hombre inteligente e íntegro puede sentirse adulado si su nombre aparece en la lista de los honores concedidos por el Rey? César puede recibir de buen agrado las cosas que le pertenecen, pero cuando un hombre de ciencia, corno tal hombre de ciencia, solicita las migajas de la mesa de la realeza, se compara a los sarnosos y hambrientos perros que lamen las úlceras de los pordioseros. Es de creer que Newton fuera honrado caballero por sus servicios en la Casa de la Moneda, no por su ciencia.

¿Se anuló el genio matemático de Newton? En su mayor parte no. Continuó siendo el compañero de Arquímedes. Pero el sabio griego, aristócrata por nacimiento, no se cuidó jamás de los honores de una posición de que siempre había gozado; hasta el último minuto de su larga vida se dedicó a la Matemática con la misma intensidad con que lo había hecho en su juventud. Pero a pesar de las enfermedades y de la pobreza, los matemáticos pertenecen intelectualmente a una raza de larga vida; su capacidad de creación sobrevive en algunas décadas a la de los poetas y artistas y hasta a la de los científicos. Newton tenía aun una inteligencia tan vigorosa como la que había poseído siempre. Si sus intrigantes amigos le hubieran dejado tranquilo, Newton podría haber creado fácilmente el Cálculo de variaciones, un instrumento para los descubrimientos *físicos* y matemáticos en lugar de dejar que lo iniciaran los Bernoulli, Euler y Lagrange. Ya lo había barruntado en los Principia cuando determinó la forma de la superficie de revolución que puede engendrarse en un fluido con la mínima resistencia. Estableció así en grandes líneas todo el método. Igual que Pascal cuando abandonó este mundo por el reino más satisfactorio de los cielos, Newton era aún un matemático cuando volviendo su espalda a sus estudios de Cambridge se paseó por el más impresionante santuario de la Casa de la Moneda.

En 1696, Johann Bernoulli y Leibniz lanzaron dos endiablados desafíos a los matemáticos de Europa. El primero tiene aún importancia; el segundo no es de la misma clase. Supongamos dos puntos fijados al azar en un plano vertical. ¿Cuál es la forma de la curva que una partícula debe seguir (sin fricción) bajo la influencia de la gravedad, para pasar del punto superior al inferior en el menor tiempo? Este es el problema la braquistócrona, (tiempo mínimo). Después de que el problema tuvo en jaque a los matemáticos de Europa durante seis meses , Newton oyó hablar de él por primera vez el 29 de enero de 1696, cuando un amigo se lo comunicó. Acababa de llegar a su casa, fatigado, después de una larga jornada en la Casa de la Moneda. Después de cenar resolvió el problema (y también el segundo), y al día siguiente comunicó sus soluciones anónimamente a la Royal Society. A pesar de todas sus precauciones, no pudo ocultar su identidad. Mientras estuvo en la Casa de la Moneda, Newton se opuso a los esfuerzos de los matemáticos y hombres de ciencia que querían arrastrarle a discusiones de interés científico. Al ver la solución, Bernoulli exclamó inmediatamente: "Ah, reconozco al león por su garra". (No es esta una traducción exacta del latín de Bernoulli). Todos reconocieron a Newton, y lo habrían hecho aunque tuviera un saco de monedas sobre su cabeza y no dijera su nombre.

Una segunda prueba de la vitalidad de Newton fue dada en 1716, cuando tenía 74 años. Leibniz propuso un problema, que a él le pareció particularmente difícil, a los matemáticos de Europa, dirigiéndose a Newton en particular[2]. Newton lo recibió a las cinco de la tarde, cuando volvía fatigado de la terrible Casa de la Moneda. Lo resolvió aquella misma tarde. Leibniz pensaba con demasiado optimismo que esta vez había atrapado al león. En toda la historia de la Matemática Newton no ha tenido superior, ni quizá igual, en la capacidad para concentrar todas las fuerzas de su inteligencia sobre un problema difícil.

La historia de los honores que pueden recaer en un hombre, es una cuestión sin importancia. Newton tuvo todo lo que puede tener un hombre durante su vida. En general, Newton llevó una existencia más afortunada que la que han tenido otros grandes hombres. Su salud física fue excelente hasta sus últimos años. Jamás gastó anteojos y sólo perdió un diente. Sus cabellos encanecieron cuando tenía treinta años, pero permanecieron espesos y suaves hasta su muerte.

El recuerdo de sus últimos días es más humano y más conmovedor. Tampoco Newton podía escapar al sufrimiento. Su valor y resistencia, bajo el casi constante dolor que sufrió durante los últimos dos o tres años de su vida, añade otro laurel a su corona como ser humano. Sufrió las torturas de "los cálculos" sin quejarse, aunque el sudor brotaba de su frente, y siempre tuvo una palabra de simpatía para los que le rodeaban. Por último, "una persistente tos" le debilitó mucho y después de haber cedido el dolor durante algunos días, murió pacíficamente, entre la una y las dos de la mañana, el 20 de marzo de 1727, a los 85 años. Fue enterrado en la Abadía de Westminster.

---

[2] El problema era encontrar las trayectorias ortogonales de cualquier familia uniparamétrica de curvas (en lenguaje moderno).

Capítulo Séptimo
MAESTRO DE TODOS LOS OFICIOS

LEIBNIZ

He tenido muchas ideas que quizá puedan ser útiles con el tiempo, si otros con más penetración que yo, calan profundamente en ellas algún día, y unen la belleza de sus mentes con el trabajo de la mía.
G. Leibniz

El refrán "Aprendiz de todos los oficios, maestro de ninguno" tiene sus excepciones particulares, como cualquier otro proverbio, y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) es una de ellas.
La Matemática fue uno de los muchos campos en que Leibniz demostró su extraordinario genio. Las leyes, la religión, la política, la historia, la literatura, la lógica, la metafísica y la filosofía especulativa le deben también contribuciones, y cualquiera de ellas le habría asegurado fama y perpetuado su memoria. La frase "genio universal" puede aplicarse a Leibniz, cosa que no puede hacerse con Newton, su rival en Matemática, e infinitamente superior en filosofía natural.
Hasta en la Matemática la universalidad de Leibniz contrasta con la dirección no desviada de Newton hacia un único fin, el de aplicar el razonamiento matemático a los fenómenos del universo físico. Newton imaginó una cosa de absoluta primera magnitud en Matemática; Leibniz, dos. La primera de ellas fue el Cálculo; la segunda, el Análisis combinatorio. El Cálculo es el lenguaje natural de lo continuo; el Análisis combinatorio es para lo discontinuo (véase capítulo I), lo que el Cálculo es para lo continuo. En el análisis combinatorio nos enfrentamos con un conjunto de cosas diferentes, cada una de las cuales tiene una individualidad por sí misma, y en la situación más general nos preguntamos cuáles son las relaciones, si las hay, que subsisten entre esos individuos completamente heterogéneos. Aquí no observamos sencillas semejanzas de nuestra población matemática, sino aquello que los individuos, como *individuos,* tienen de común, sin duda no mucho. En efecto, parece, que, en último término, todo lo que podemos decir

combinatoriamente se reduce a una cuestión de enumerar los individuos en diferentes formas y comparar los resultados. Parece un milagro que este procedimiento, al parecer, abstracto y sencillo, conduzca a alguna cosa de importancia, pero así es en efecto. Leibniz fue un precursor en este campo, y uno de los primeros en percibir que la anatomía de la lógica, "las leyes del pensamiento", es una cuestión de Análisis combinatorio. En nuestros días todo el tema está siendo aritmetizado.

En Newton el espíritu matemático de su época tomó forma y sustancia definidas. Era inevitable después de los trabajos de Cavalieri (1598-1647), Fermat (1601-1665), Wallis (1616-1703), Barrow (16301677), y otros autores que el Cálculo infinitesimal surgiera por sí *mismo*, como una disciplina autónoma. De igual modo que un cristal al caer en una solución saturada en el instante crítico, Newton solidificó las ideas suspendidas en el ambiente de su época, y el Cálculo tomó forma definida. Cualquier mente de primera categoría podría servir de cristal. Leibniz era también una mente de primera categoría, y también cristalizó el Cálculo. Pero Leibniz fue más que un factor para la expresión del espíritu de su época, que Newton, en la Matemática, no fue. En su sueño de una "característica universal", Leibniz se anticipó en dos siglos a su época en lo que se refiere a la Matemática y la Lógica. Pero, según se desprende de la investigación, Leibniz estuvo sólo en su segundo gran sueño matemático.

La unión en una mente de la más elevada capacidad en los dos amplios dominios antitéticos del pensamiento matemático, el analítico y el combinatorio, o lo continuo y lo discontinuo, carece de precedentes antes de Leibniz y tampoco tiene sucesores. Es el único hombre en la historia de la Matemática que ha tenido ambas cualidades de pensamiento en un grado superlativo. Su faceta combinatorial se refleja ya en la obra de sus sucesores alemanes, rica en cuestiones superficiales, pero sólo en el siglo XX, cuando la obra de Whitehead y Russell, continuación de la de Boole en el siglo XIX, realizó en parte el sueño de Leibniz de un razonamiento simbólico universal, adquirió la faceta combinatorial de la Matemática la suprema importancia para el pensamiento matemático y científico que Leibniz había predicho. En la actualidad el método combinatorio de Leibniz, desarrollado en la Lógica simbólica y en sus derivaciones, es tan importante para el Análisis que él y Newton iniciaron hacia su actual complejidad como lo es el Análisis mismo. El método simbólico ofrece la única posibilidad de desligar al Análisis matemático de las paradojas y antinomias que habían infestado sus fundamentos desde Zenón.

El análisis combinatorio ya ha sido mencionado al ocupamos de la obra de Fermat y de Pascal, respecto a la teoría matemática de la probabilidad. Esto, sin embargo, es sólo un detalle en la "característica universal" que Leibniz abrigaba en su mente, y hacia la cual, como veremos, dio un considerable paso. Pero el desarrollo y aplicaciones del Cálculo ofrecía una atracción irresistible para los matemáticos del siglo XVIII, y el programa de Leibniz no fue considerado seriamente hasta 1840. Después fue nuevamente olvidado, salvo por algunos disidentes de la moda matemática, hasta llegar el año 1910, cuando el movimiento moderno en el razonamiento simbólico dio lugar a otros *Principia*, *los Principia Mathematica* de Whitehead y Russell.[1]

Desde 1910 el programa de Leibniz despertó gran interés entre los matemáticos modernos. Por un curioso tipo de "repetición eterna", la teoría de probabilidades, donde aparece por primera vez el análisis combinatorio en sentido restringido (aplicado por Pascal, Fermat y sus sucesores), se presenta luego en el programa de Leibniz de la revisión fundamental de los conceptos básicos de la probabilidad, que la experiencia, en parte en la nueva mecánica de los cuantos, ha demostrado

[1] Un antecedente de esta obra es la de B. Russell: Introducción a la *Filosofía* Matemática, traducida al castellano y publicada por la Editorial Losada, 1945.

que son aceptables. En la actualidad, la teoría de probabilidades está en vías de llegar a ser una comarca en el reino de la lógica simbólica "combinatoria" en el amplio sentido de Leibniz.

El papel que Leibniz desempeñó en la creación del Cálculo fue ya expuesto en el capítulo anterior, donde también se relata la desastrosa controversia a que dio lugar. Largo tiempo después Newton y Leibniz murieron y fueron enterrados. (Newton en la Abadía de Westminster, donde es reverenciado por todos los pueblos de habla inglesa; Leibniz, indiferentemente olvidado por su propio pueblo, en una olvidada sepultura donde sólo los sepultureros y su propio secretario oyeron el ruido de la tierra al caer sobre el ataúd).

Leibniz no completó su gran proyecto de reducir todo razonamiento exacto a una técnica simbólica, cosa que todavía no se ha logrado; pero lo imaginó y dio un paso significativo. La servidumbre a las costumbres de su época de obtener honores inútiles y más dinero del necesario, la universalidad de su mente y las agotadoras controversias, mantenidas durante sus últimos años, militaron contra la creación de una obra maestra, como la que Newton realizó en sus *Principia*.

En el breve resumen acerca de lo que Leibniz realizó de sus múltiples actividades y de su inquieta curiosidad vemos la tragedia de la frustración, que ha marchitado prematuramente más de un talento matemático de primer orden: Newton, persiguiendo una estimación popular de la que no tenía necesidad, y Gauss, separado de su gran obra por la necesidad de llamar la atención de hombres que eran intelectualmente inferiores. De todos los grandes matemáticos, solamente Arquímedes no fue arrastrado a otras actividades. Él fue el único que nació dentro de una clase social a la que otros se esforzaron por elevarse; Newton, cruda y directamente, Gauss indirectamente, y sin duda inconscientemente, buscando la aprobación de hombres de reputación establecida y socialmente reconocidos, aunque él era el hombre más sencillo entre los sencillos.

La aristocracia nos muestra una cosa: su posesión por derechos de nacimiento o por un acontecimiento social enseña su inutilidad a su afortunado poseedor.

En el caso de Leibniz el ansia de dinero, que obtenía de sus aristocráticos protectores, contribuyó a su declinación intelectual. Se hallaba siempre desentrañando las genealogías de los bastardos semireales, cuyos descendientes le pagaban generosamente para que aprobase con su insuperable conocimiento de la ley, sus legítimas pretensiones a ducados. Pero aun más desastrosamente que esta ansia por el dinero actuó su inteligencia universal capaz de todo; en efecto, al examinar su obra se diría que Leibniz vivió no setenta años, sino un siglo. Como Gauss dice, Leibniz malgastó su espléndido talento para la Matemática en una diversidad de temas en los que ningún ser humano puede aspirar a distinguirse. Mas ¿por qué censurarle? Fue lo que fue, y tenía que seguir su destino. La gran difusión de su genio le hizo capaz del sueño que no tuvieron Arquímedes, Newton, ni Gauss, la característica universal. Otros pudieron realizarla; Leibniz desempeñó su papel al soñar que era posible.

Puede decirse que Leibniz no vivió una vida, sino varias. Como diplomático, historiador, filósofo y matemático, hizo lo suficiente, en cada campo, para llenar una vida ordinaria de trabajo.

Cuatro años era menor que Newton, nació en Leipzig el 1 de julio de 1646; vivió sólo 70 años, mientras Newton vivió 85, y murió en Hanover el 14 de noviembre de 1716. Su padre, profesor de filosofía moral, procedía de una buena familia, que había servido al gobierno de Sajonia durante tres generaciones. Así, los primeros años de Leibniz pasaron en una atmósfera de estudio pesadamente cargada de política.

A la edad de seis años perdió a su padre, pero ya antes había adquirido de él la pasión por la historia. Aunque asistió a la escuela de Leipzig, Leibniz fue un autodidacto por la incesante lectura en la biblioteca del padre. A los 8 años comenzó a estudiar latín y a los 12, lo dominaba suficientemente para componer versos latinos. Del latín pasó al griego, que también aprendió por su propio esfuerzo.

En esta fase su desarrollo mental es paralelo al de Descartes: los estudios clásicos ya no le satisficieron y volvió a la lógica. Desde estos ensayos, cuando tenía menos de 15 años, para reformar la lógica de los clásicos, de los escolásticos y de los padres cristianos, desarrolló los primeros gérmenes de su *Characteristica Universalis*, o Matemática Universal, que, como ha sido demostrado por Couturat, Russell y otros autores, la clave para su metafísica. La lógica simbólica inventada por Boole en 1847-54, (que será discutida en un capítulo posterior) es sólo la parte de la *Characteristica* que Leibniz llamó *calculus raticinator*.), Ahora mencionaremos su propia descripción de la característica universal.

Teniendo 15 años, Leibniz ingresó en la Universidad de Leipzig como estudiante de leyes; sin embargo, las leyes no ocuparon todo su tiempo. En los dos primeros años leyó mucha filosofía, y por primera vez se dio cuenta del nuevo mundo que habían descubierto los filósofos “naturales" o modernos, Kepler, Galileo y Descartes. Viendo que esta nueva filosofía sólo podía comprenderse estando familiarizado con la Matemática, Leibniz pasó el verano en 1663 en la Universidad de Jena, donde asistió a los cursos de Matemática de Erhard Weigel, un hombre de considerable reputación local pero que apenas puede llamarse matemático.

Cuando volvió a Leipzig se concentró en el estudio de las leyes. En 1666, teniendo veinte años, estaba totalmente preparado para obtener el título de doctor en leyes. Recordaremos que este es el año en que Newton, estando descansando en Woolsthorpe, realizó el descubrimiento del Cálculo y de su ley de la gravitación universal. La facultad de Leipzig, biliosa y celosa, negó a Leibniz el grado de doctor, tomando como pretexto su juventud, aunque la realidad era que Leibniz conocía más profundamente las leyes que todo aquel conjunto de necios.

Antes había obtenido el grado de bachiller, en 1663, a la edad de 17 años, con un brillante ensayo que anunciaba una de las doctrinas cardinales de su filosofía madura. No disponemos de espacio para entrar en detalles, pero puede mencionarse que una posible interpretación del ensayo de Leibniz es la doctrina de "el organismo como un todo", que una escuela progresista de biólogos y otra de psicólogos han encontrado aceptable en nuestra época.

Disgustado por la ruindad de la facultad de Leipzig, Leibniz abandonó su ciudad natal y *se* dirigió a Nuremberg, donde, el 5 de noviembre de 1666, en la Universidad afiliada de Altdorf, no sólo recibió su grado de doctor por su ensayo sobre un nuevo método (el histórico) de enseñar la ley, sino que también fue solicitado para que aceptara el cargo de profesor en dicha Universidad. Pero igual que Descartes, rechazó el ofrecimiento de ser teniente general debido a que aspiraba a otra vida, Leibniz renunció diciendo que tenía ambiciones muy diferentes. No divulgó cuáles eran esas ambiciones. No parece probable que se tratara de hacer de picapleitos en defensa de príncipes, labor que el destino le reservaba por entonces. La tragedia de Leibniz fue haber conocido a los abogados antes que a los hombres de ciencia.

Su ensayo sobre la enseñanza de la ley y su proposición para una nueva codificación fueron compuestos en un viaje desde Leipzig a Nuremberg. Esto muestra una de las notables características de Leibniz, su capacidad para trabajar en cualquier parte, en cualquier momento, bajo todas las condiciones. Leía, escribía y pensaba incesantemente. Gran parte de sus obras matemáticas, sin hablar de cualesquiera de sus otros trabajos, fue escrita en las carreteras polvorientas de la Europa del siglo XVII, que recorrió de una parte a otra en su vida errabunda. La cosecha de toda esta incesante actividad fue un montón de papeles de todos los tamaños y de todas las calidades, grande como una montaña de heno, que jamás fue totalmente clasificado y mucho menos publicado. En la actualidad gran parte de su obra se encuentra empaquetada en la Biblioteca Real de Hanover, esperando la paciente labor de un ejército de estudiosos que separen el trigo de la paja.

Parece increíble que una sola cabeza pueda ser la responsable de todos los pensamientos publicados y no publicados que Leibniz traslad6 al papel. Como un detalle de interés para los frenólogos y anatómicos, se ha dicho que el cráneo de Leibniz fue vaciado y medido, encontrándose que su tamaño era marcadamente inferior al del volumen adulto normal. También se sabe que existen perfectos idiotas con nobles frentes que se proyectan hacia adelante como enormes pucheros.

El año milagroso de Newton, el año 1666, fue también el gran año para Leibniz. En lo que él llamó un "ensayo escolar", *De arte combinatoria*, el joven de veinte años se propone crear "*un método general en el que todas las verdades de la razón sean reducidas a un tipo de cálculo. Al mismo tiempo esto sería un especie de lenguaje o escritura universal, pero absolutamente diferente de todos los proyectados hasta ahora; los símbolos y hasta las palabras de él se dirigirán a la razón, y los errores, salvo los de hecho, serán simples errores de cálculo. Será muy difícil formar o inventar este lenguaje o característica, pero muy fácil comprenderlo sin diccionario*".

En una descripción posterior calcula confiadamente y con optimismo el tiempo que se tardará en llevar a cabo este proyecto: “¡Creo que algunos hombres elegidos realizarán la hazaña dentro de cinco años!". Hacia el fin de su vida Leibniz se lamentaba que otras cosas le hubieran impedido completar su idea. Si hubiera sido más joven o hubiera tenido ayudantes jóvenes y competentes, cree que aun podría hacerlo: una excusa muy común de los talentos que se han gastado en intrigas y ambiciones.

Puede decirse que ese sueño de Leibniz fue considerado por sus contemporáneos matemáticos y científicos como un sueño, y nada más que como un sueño, y fue cortésmente dado al olvido, calificado como la idea fija de un hombre de genio universal.

En una carta del 8 de septiembre de 1679, Leibniz (tratando de Geometría en particular, pero del razonamiento en general) comunica la Huygens una "nueva característica completamente diferente del Álgebra que tendrá grandes ventajas para representar de un modo exacto y natural ante la mente, y sin necesidad de números, todas las cosas que dependen de la imaginación".

Esta forma simbólica, directa, de tratar la Geometría, fue inventada en el siglo XIX por Hermann Grassmann (cuya obra en Álgebra generaliza la de Hamilton). Leibniz discute luego las dificultades inherentes al proyecto y subraya su superioridad sobre la Geometría analítica cartesiano.

"Pero su principal utilidad consiste en las consecuencias y razonamientos que pueden ser realizados por las operaciones de caracteres ,[símbolos] que no se pueden expresar por diagramas (ni siquiera por modelos), sin una excesiva complicación, o sin hacerlos confusos por un excesivo número de puntos y líneas, de modo que estemos obligados a hacer una infinidad de inútiles ensayos. En cambio, este método conduciría segura y simplemente [al fin deseado]. Creo que la mecánica puede ser tratada por este método casi como la Geometría"

Entre las importantes cosas que Leibniz realizó en esa parte de su característica universal que ahora se llama Lógica simbólica, podemos citar sus fórmulas de las propiedades principales de la adición lógica y de la multiplicación lógica, la negación, la identidad, la clase nula y la inclusión de clase. Para la explicación de lo que algunos de estos términos significan y de los postulados del Álgebra de la Lógica se debe consultar el capítulo sobre Boole. Todo esto quedó al lado del camino. Si hubiera sido recogido por hombres capaces cuando Leibniz malgastaba su talento, en lugar de esperar hasta el año 1840, la historia de la Matemática podría haber sido muy diferente de lo que es. Pero más vale tarde que nunca.

Después de haber tenido su sueño universal a los veinte años, Leibniz se prestó a hacer otras cosas más prácticas al ser una especie viajante comercial del Elector de Maguncia. En un último o de los sueños, antes de sumergirse en una política más o menos sucia, Leibniz dedicó algunos meses a la alquimia, en compañía de los Rosacruces que infestaban Nuremberg,

Su ensayo sobre un nuevo método de enseñar la ley fue el que más le perjudicó. El ensayo llamó la atención del hombre que era la mano derecho del Elector, el cual incitó a Leibniz para que lo publicase con objeto de poder presentar un, ejemplar al augusto Elector. Así ocurrió, y Leibniz después de una entrevista personal, fue encargado de la revisión del código. Mucho antes ya había tenido que, desempeñar importantes comisiones delicadas y secretas. Fue un diplomático de primera categoría, siempre agradable, siempre franco y abierto, pero jamás escrupuloso, ni siquiera cuando dormía. Se debe a su genio, a menos en parte, la fórmula inestable conocida como "equilibrio de Poder". Como un caso de cinismo brillante difícil de sobrepasar recordaremos el gran sueño de Leibniz de una guerra santa para la conquista y civilización de Egipto. Napoleón quedó altamente disgustado al descubrir que Leibniz se le había anticipado en esta sublime visión.

Hasta el año 1672 poco sabía Leibniz de lo que era la Matemática moderna. Tenía 26 años cuando comenzó su verdadera educación matemática, en las manos de Huygens, a quien conoció en París en los Intervalos entre una misión diplomática y otra.

Christian Huygens (1629-1695), aunque era principalmente un físico (sus obras mejores se refieren a la horología y a la teoría ondulatoria de la luz), era también un perfecto matemático. Huygens mostró a Leibniz un ejemplar de sus trabajos matemáticos sobre el péndulo. Fascinado por el poder del método matemático en manos competentes, Leibniz pidió a Huygens le diera lecciones, a lo que Huygens, viendo que Leibniz era una mente de primera categoría, accedió gustoso. Leibniz ya había realizado una impresionante serie de descubrimientos, hechos por medio de sus propios métodos, fases de la característica universal. Entre ellos se hallaba una máquina de calcular, muy superior a la de Pascal, pues ésta sólo servía para la suma y la resta. La máquina de Leibniz practicaba también multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíces. Bajo la experta guía de Huygens, Leibniz se encontró a sí mismo. Era un matemático ingénito. Las lecciones fueron interrumpidas desde enero a marzo de 1673, durante la ausencia de Leibniz en Londres, como agregado diplomático del Elector. Estando en Londres, Leibniz conoció a los matemáticos ingleses, mostrándoles parte de su labor, que según supo, era ya conocida. Sus amigos los ingleses le informaron de la cuadratura de la hipérbola por Mercator, una de las claves que Newton siguió para su invención del Cálculo. Esto llevó a Leibniz al estudio de las series infinitas, que luego desarrolló. Uno de sus descubrimientos (algunas veces atribuido al matemático escocés James Gregory, 1638-1675) es el siguiente: si π es la razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro, se tiene:

$$\frac{p}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

continuando la serie en la misma forma indefinidamente. Ésta no es una forma práctica de calcular el valor numérico de π (3,1415926 ...); pero es sorprendente la simple relación entre π y *todos* los números impares.

Durante su permanencia en Londres, Leibniz asistió a las reuniones de la Royal Society, donde mostró su máquina calculadora. Por este y por sus otros trabajos fue elegido miembro extranjero de la Sociedad antes de que volviera a París, en marzo de 1673. El y Newton (1700) fueron los primeros miembros extranjeros de la Academia Francesa de Ciencias.

Muy satisfecho de la labor de Leibniz en el extranjero Huygens le incitó a que la continuara. Leibniz dedicó todos los momentos de que disponía a la Matemática. Y antes de dejar París, para trasladarse a Hanover, en 1676, donde se puso al servicio del Duque de Brunswick-Luneburg, elaboró algunas de las fórmulas elementales del Cálculo y descubrió "el teorema fundamental del Cálculo" (véase capítulo anterior), labor realizada, si aceptamos sus propios datos, en el año 1675. No fue publicado hasta el 11 de julio de 1677, once años después del descubrimiento de Newton, que no fue hecho público por éste hasta después de haber aparecido el trabajo de Leibniz. La controversia comenzó en términos graves cuando Leibniz, ocultándose diplomáticamente en un artículo anónimo, escribió un severo resumen crítico del trabajo de Newton en las *Acta Eruditorum*, que Leibniz había fundado en 1682, y de la que era el principal editor. En el intervalo entre 1677 y 1704 el cálculo de Leibniz constituyó en el Continente un instrumento de utilidad real y fácilmente aplicable, gracias a los esfuerzos de los suizos Bernoulli, Jacob y su hermano Johann, mientras en Inglaterra, debido a la repugnancia de Newton para participar sus descubrimientos matemáticos, el Cálculo era aún una curiosidad de una utilidad muy relativa.

El hecho de que cosas que ahora son fáciles para los que se inician en el Cálculo costaran a Leibniz (y seguramente también a Newton) meditaciones y muchos ensayos antes de encontrar el camino exacto, indicará la transformación que ha tenido la Matemática, desde el año 1675. En lugar de los infinitésimos de Leibniz utilizamos las razones, expuestas en el capítulo anterior. Si u, v, son funciones de x ¿cómo será expresada la razón del cambio de uv con respecto a x en función de las respectivas razones del cambio de u y v con respecto a x?

En símbolos, ¿qué es $\frac{d(uv)}{dx}$ en función de $\frac{du}{dx}$ y $\frac{dv}{dx}$? Leibniz pensó que sería

$$\frac{du}{dx} \times \frac{dv}{dx}$$

aunque lo correcto es

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

El Elector murió en 1673, y Leibniz se encontró más o menos libre durante la última parte de su permanencia en París. Dejó París en 1676 para entrar al servicio del Duque John Frederick de Brunswick-Luneburg y se dirigió a Hanover, por vía Londres y Amsterdam. Fue en esta última ciudad donde llevó a cabo una de las más sombrías negociaciones de su larga carrera de diplomático filósofo. La historia de la relación de Leibniz, con el "judío intoxicado por Dios" Benito Spinoza (1632-1677) puede ser incompleta, pero se dice que Leibniz fue esta vez poco ético en una cuestión ética. Leibniz parece que pensó en aplicar su ética a los fines prácticos. Conoció numerosos párrafos de la obra maestra no publicada de Spinoza, *Ethica (Ordina Geometrica Demonstrata*), un tratado de ética desarrollado a la manera de la Geometría euclidiana y cuando Spinoza murió el año siguiente, Leibniz creyó conveniente no recordar su visita a Amsterdam. Los estudiosos en este campo parece que aceptan que la filosofía de Leibniz, siempre que toca la ética, se apropia sin reconocerlo los conceptos de Spinoza.

Sería temerario para los no especializados en ética afirmar que Leibniz era culpable, o por el contrario, sugerir que sus propios pensamientos sobre ética eran independientes de los de Spinoza. De todos modos existen al menos dos ejemplos similares en cuestiones matemáticas (funciones elípticas, Geometría no euclidiana), donde todas las pruebas parecían suficientes para llevar al convencimiento de que se había cometido un desafuero mayor que el atribuido a Leibniz. Cuando fueron descubiertos diarios y cartas no sospechadas, años después de la muerte de todos los acusados, parece que éstos eran completamente inocentes.

Los restantes cuarenta años de la vida de Leibniz fueron dedicados al servicio de la familia Brunswick. Sirvió a tres de sus miembros, como bibliotecario, historiador y cerebro general de la familia. Era una cuestión de gran importancia para los Brunswick tener una exacta historia de todas sus relaciones con otras familias tan altamente favorecidas por los cielos como ella misma. Leibniz no era un simple catalogador de libros, en su función como bibliotecario, sino un notable especialista en genealogía y buceador de los archivos cuya función era apoyar las pretensiones de sus príncipes a la mitad de los tronos de Europa. Sus investigaciones históricas le llevaron a recorrer toda Alemania y luego Austria e Italia, entre los años 1687 y 1690.

Durante su permanencia en Italia Leibniz visitó Roma y el Papa le pidió aceptara el cargo de bibliotecario en el Vaticano. Pero como el prerrequisito para el nombramiento era que Leibniz se hiciera católico, éste renunció, sintiéndose por una vez escrupuloso. Su repugnancia para rechazar este excelente puesto puede haberle incitado a una inmediata aplicación de su “característica universal", la ambición más fantástica de todos sus sueños universales. De haberla realizado hubiera podido vivir en el Vaticano sin inconveniente alguno.

Su gran proyecto era nada menos que reunir las Iglesias Protestante y Católica. Como la primera se había separado de la segunda, el proyecto no era tan absurdo como parece a primera vista. En su gran optimismo, Leibniz desconoció una ley que es tan fundamental para la naturaleza humana como la segunda ley de la termodinámica es para el Universo físico: todos los credos tienden a descomponerse en dos; cada uno de los cuales se desdobla a su vez en otros dos, y así sucesivamente, hasta que después de un número finito de generaciones (que se puede fácilmente calcular por logaritmos) hay menos seres humanos en una determinada región, cualesquiera sea su extensión, que credos existentes, y el dogma original del primer credo se diluye en un gas transparente demasiado sutil para sostener la fe de cualquier ser humano, por mezquino que sea. Una conferencia realizada en Hanover el año 1683 para lograr la reconciliación, fracasó, pues ninguno se decidía a ser invadido por el otro, y ambos partidos se aprovecharon de la cruenta reyerta de 1688, en Inglaterra, entre católicos y protestantes, considerándola como un motivo legítimo para suspender la conferencia *sine die.*

No habiendo obtenido nada de esta farsa, Leibniz organizó inmediatamente otra. Su intento para unir las dos sectas protestantes de su tiempo tan sólo consiguió hacer más obstinados y tenaces de lo que habían sido a muchos hombres excelentes. La conferencia protestante se disolvió en medio de recíprocas recriminaciones.

Por esta época Leibniz se dirigió a la filosofía para obtener un consuelo. En un esfuerzo por ayudar a Arnauld, el viejo jansenista amigo de Pascal, Leibniz compuso un tratado semicasuístico sobre metafísica, destinado a ser utilizado por los jansenistas y por todos los que sintieran la necesidad de algo más sutil que la extraordinariamente sutil lógica de los jesuitas. Su filosofía ocupó el resto de la vida de Leibniz (mientras no se dedicaba a la interminable historia de la familia Brunswick) en todo un cuarto de siglo. No es difícil imaginar cuál es la vasta nube de filosofía desarrollada durante 25 años por una mente como la de Leibniz. Sin duda, todos los lectores habrán oído hablar de la ingeniosa teoría de las mónadas, repetición en miniatura del Universo de las cuales están compuestas *todas las cosas,* como una especie de uno en todo, todo en uno, y mediante la cual Leibniz explicaba todas las cosas (salvo las mónadas) en este mundo y en el siguiente.

La importancia del método de Leibniz aplicado a la filosofía no puede ser negada. Como una muestra de los teoremas demostrados por Leibniz en su filosofía, podemos mencionar el referente a la existencia de Dios. En su intento para probar el teorema fundamental del optimismo, toda cosa es para lo mejor en este mejor de todos los mundos posibles, Leibniz tuvo menos éxito, y tan sólo en 1759, 43 años después de que Leibniz muriera olvidado, fue publicada la demostración concluyente por Voltaire en su libro *Candide*, que marca una época. Puede mencionarse también otro hecho aislado. Los que están familiarizados con la relatividad general recordarán que ya no se acepta el “espacio vacío", espacio totalmente desprovisto de materia. Leibniz lo rechazó como carente de sentido.

La enumeración de los problemas que interesaron a Leibniz dista mucho de ser completa. La economía, la filología, las leyes internacionales (en las que fue un precursor), el establecimiento de la minería como una industria provechosa en ciertas partes de Alemania, la teología, la fundación de academias y la educación de la joven electora Sophie de Brandenburg (comparable a la Elisabeth de Descartes), atrajeron su atención, y en cada uno de estos campos hizo algo notable. Posiblemente sus aventuras menos logradas tuvieron lugar en la mecánica y en la ciencia física, donde algunos de sus disparates resaltan; frente a la labor tranquila y continua de hombres como Galileo, Newton, Huygens, o hasta Descartes.

Una cuestión más en esta lista exige nuestra atención aquí. Al ser llamado a Berlín en 1700, corno tutor de la joven Electora, Leibniz tuvo tiempo de organizar la Academia de Ciencias de Berlín, siendo su primer presidente. La Academia era aún una de las tres o cuatro instituciones doctas de esencial importancia en el mundo, hasta que los nazis la "purgaron". Análogas fundaciones en Dresde, Viena y San Petersburgo, no llegaron a cuajarse durante la vida de Leibniz, pero después de su muerte fueron llevados a cabo los planes para la Academia de Ciencias de San Petersburgo, que Leibniz sometió al juicio de Pedro el Grande. El intento de fundar la Academia Vienesa fue frustrado por los jesuitas, cuando Leibniz visitó Austria por última vez en 1714. Esta oposición era de esperar después de los trabajos de Leibniz en favor de Arnauld. El hecho de que un maestro diplomático fuera derrotado en una cuestión de nimia política académica muestra hasta qué punto había declinado ya Leibniz a la edad de 60 años. Ya no era e mismo; sus últimos años, fueron tan sólo una sombra de su primitiva gloria.

Habiendo servido a los príncipes durante toda su vida recibió el pago usual por tales servicios. Enfermo, anciano y gastado por la controversia, fue alejado con un puntapié.

Leibniz volvió a Brunswick en septiembre de 1714, donde supo que el Elector George Louis, "el honrado necio", como se le conoce en la historia inglesa, había hecho su equipaje y se había trasladado a Londres, para ser el primer rey alemán de Inglaterra. Nada podía haber satisfecho tanto a Leibniz como seguir a George a Londres, aunque enemigos de la *Royal Society y* de otras partes de Inglaterra eran sus ahora numerosos y enconados, debido a la controversia con Newton. Pero el rudo George, transformado ahora en caballero, ya no necesitaba de la diplomacia de Leibniz, y ordenó bruscamente que el cerebro que le había ayudado a penetrar en la sociedad civilizada permaneciera en la biblioteca de Hanover, para continuar la interminable historia de la ilustre familia Brunswick.

Cuando Leibniz murió dos años más tarde (1716), la historia diplomáticamente modificada estaba aún incompleta.

A pesar de su tenaz labor, Leibniz, había sido incapaz de llevar su historia más allá del año 1005, lo que significaba 300 años de indagación. La familia estaba tan embrollada en sus aventuras matrimoniales que hasta el universal Leibniz fue incapaz de proporcionar a todos sus miembros escudos intachables. La familia Brunswick demostró su aprecio por esta inmensa labor olvidándola hasta el año 1843, época en que fue publicada. Será imposible decir si esta historia es completa o ha sido expurgada hasta que se haya estudiado el resto de los manuscritos de Leibniz. En la actualidad, transcurridos trescientos años desde su muerte, la reputación de Leibniz como matemático es mayor de la que fue cuando su secretario le siguió hasta la tumba, y todavía sigue aumentando.

Capítulo Octavo
¿Naturaleza o Educación?

LOS BERNOULLI

Estos hombres desarrollaron ciertamente una gran labor y alcanzaron admirablemente la meta que se habían fijado.

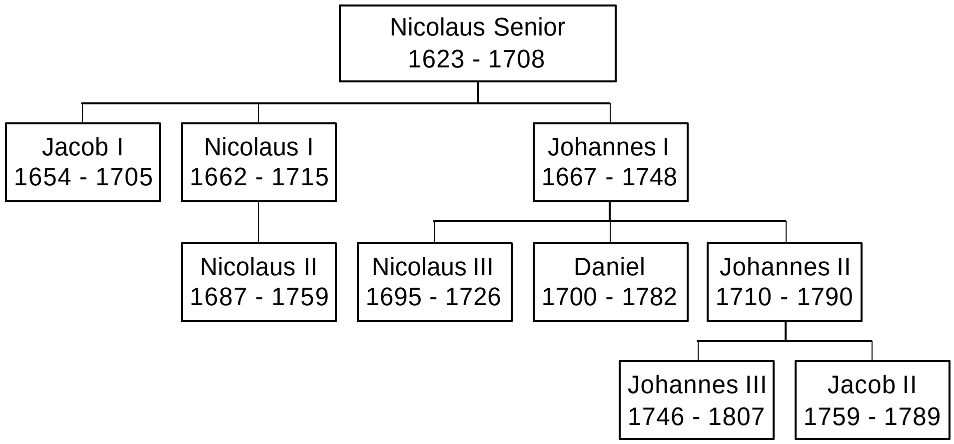
Johannes Bernoulli

Desde que la gran depresión comenzó a derrumbar la civilización occidental, los eugenistas, los genetistas, los psicólogos, los políticos, y los dictadores, por muy diferentes razones, han prestado renovado interés en la controversia aun no resuelta, de la herencia frente al medio. En un extremo, el cien por cien de los proletarios mantiene que cualquiera puede ser genio si se le da la oportunidad, mientras el otro extremo, los *tories*, afirman que el genio es innato y que puede darse en los bajos fondos de Londres. Entre los dos extremos existen todos los matices de pensamiento. La opinión media mantiene que la naturaleza, y no la educación, es el factor dominante para que surja el genio, pero sin una asistencia deliberada o accidental el genio perece. La historia de la Matemática ofrece abundante material para un estudio de este interesante problema. Sin tomar partido, hacerlo así actualmente sería prematuro, podemos decir que la prueba proporcionada por la vida de los matemáticos parece estar en favor de la opinión mencionada.

Probablemente el caso más notable es el de la familia Bernoulli, que en tres generaciones produjo ocho matemáticos, varios de ellos sobresalientes, que a su vez dieron lugar a numerosos descendientes, de los cuales la mitad eran hombres de talento superior al tipo medio, y casi todos ellos, hasta el presente, han sido individuos superiores. No menos de 120 miembros entre los descendientes de los matemáticos Bernoulli han sido seguidos genealógicamente, y de esta considerable descendencia la mayoría alcanzó posición distinguida, algunas veces eminente, en las leyes, profesorado, ciencia, literatura, administración y artes. Ninguno fracasó. El hecho más significativo observado en numerosos miembros matemáticos de esta familia de la segunda y tercera generación es que no eligieron deliberadamente la Matemática como una profesión, sino que se vieron atraídos hacia ella a pesar de sí mismos, como un dipsómano vuelve al alcohol.

Como la familia Bernoulli desempeñó un papel esencial en el desarrollo del Cálculo y de sus aplicaciones en los siglos XVII y XVIII, merece algo más que una rápida mención, aunque este libro sea simplemente una breve exposición de la evolución de la Matemática moderna. Los Bernoulli y Euler fueron, en efecto, los matemáticos que perfeccionaron el Cálculo hasta el punto de que un hombre común puede utilizarlo para obtener resultados a que no podrían llegar los más famosos sabios griegos. Pero el volumen de la labor de la familia Bernoulli es demasiado grande para que pueda hacerse una descripción detallada, en una obra como esta, y por ello nos ocuparemos de estos matemáticos conjuntamente.

Familia Bernoulli



Los Bernoulli fueron una de las muchas familias protestantes que huyeron de Amberes en 1583 para escapar de la matanza de los católicos (como en las vísperas de San Bartolomé) en su prolongada persecución de los hugonotes. La familia buscó primeramente refugio en Francfort, y luego pasó a Suiza estableciéndose en Basilea. El fundador de la dinastía Bernoulli se casó con una mujer perteneciente a una de las más antiguas familias de Basilea, y fue un gran comerciante. Nicolaus senior, que encabeza el árbol genealógico, fue también un gran comerciante, como lo habían sido su abuelo y su bisabuelo. Todos estos hombres se casaron con hijas de comerciantes, y salvo una excepción, el bisabuelo mencionado, acumularon grandes fortunas. La excepción muestra la primera desviación de la tradición familiar por el comercio, al seguir la profesión de medicina. El talento matemático estuvo probablemente latente durante generaciones en esta astuta familia de comerciantes y surgió de un modo explosivo.

Refiriéndonos ahora al árbol genealógico haremos un breve resumen de las principales actividades científicas de los ocho matemáticos descendientes de Nicolaus senior, antes de continuar con la herencia.

Jacob I estudió por sí mismo la forma del Cálculo ideada por Leibniz. Desde 1687 hasta su muerte fue profesor de Matemáticas en Basilea. Jacob I fue uno de los primeros en desarrollar el Cálculo más allá del estado en que lo dejaron Newton y Leibniz y en aplicarlo a nuevos problemas difíciles e importantes. Sus contribuciones a la Geometría analítica a la teoría de probabilidades y al cálculo de variaciones, fueron de extraordinaria importancia. Como hemos de mencionar repetidamente este último (en la obra de Euler, Lagrange, y Hamilton) será útil describir la naturaleza de algunos de los problemas abordados por Jacobo I en esta cuestión. Tenemos ya una muestra del tipo del problema tratado por el cálculo de variaciones en el teorema de Fermat sobre el tiempo mínimo.

El cálculo de variaciones es de origen muy antiguo. Según la leyenda[1], cuando Cartago fue fundada, la ciudad estaba asentada en un terreno tan pequeño que un hombre podía arar un surco que la rodeara en un solo día. ¿Qué forma debería tener este surco, o, en forma matemática, cuál es la forma que tiene el área máxima entre todas las figuras que poseen perímetros iguales? Este es un problema de *isoperímetros*, y su respuesta, en este caso, es un círculo. Parece natural que así sea, pero no es fácil de probar. (Las pruebas dadas algunas veces en las Geometrías

[1] Realmente he combinado aquí dos leyendas. Se le dio a la reina Dido una piel de toro para que abarcara el área máxima. La reina la cortó en tiras y formó un semicírculo.

elementales son falsas). La matemática del problema se reduce a hacer que una cierta integral tome un valor máximo sometido a una condición restrictiva. Jacob I resolvió este problema y lo generalizó[2].

El descubrimiento del que la braquistócrona es una cicloide ha sido ya mencionado en los capítulos precedentes. Este hecho de que la cicloide es la curva de más rápido descenso fue descubierto por los hermanos Jacob I y Johannes I, en 1697, y casi simultáneamente por varios autores. Pero la cicloide es también tautócrona. Esto le pareció a Johannes I algo maravilloso y admirable: "Con justicia podemos admirar a Huygens, por haber descubierto que una partícula pesada, describe una cicloide siempre en el mismo tiempo, cualquiera que sea el punto de partida. Pero quedaréis petrificados de asombro cuando diga que exactamente esta misma cicloide, la tautócrona de Huygens, es la braquistócrona que estamos buscando" (Bliss, loc. cit., p. 54). Jacob también quedó entusiasmado. Estos son ejemplos del tipo dé problema abordado por el cálculo de variaciones. Aunque parezca trivial, repetiremos una vez más que toda una parte de la física matemática es frecuentemente tratada con un simple *principio de* variación, igual que ocurre con el teorema de Fermat sobre el tiempo mínimo en óptica, o con el de Hamilton en dinámica.

Después de la muerte de Jacob fue publicado, en 1713, su gran tratado sobre la teoría de probabilidades, el *Ars Conjectandi.* Esta obra tiene muchos datos que son aún de máxima utilidad en la teoría de probabilidades y en sus aplicaciones para los seguros y las estadísticas, y para el estudio matemático de la herencia.

Otra investigación de Jacob muestra hasta qué punto desarrolló el Cálculo diferencial e integral. Continuando la obra de Leibniz, Jacob hizo un estudio muy completo de la catenaria, la curva que forma una cadena uniforme suspendida por dos puntos. Esto no es una simple curiosidad. Actualmente, la Matemática desarrollada por Jacob I a este respecto, encuentra su uso en las aplicaciones a los puentes colgantes y a las líneas de transmisión de alto voltaje. Cuando Jacob realizó estos estudios todo era nuevo y difícil; en la actualidad, es un ejercicio del primer curso de Cálculo infinitesimal o de mecánica tradicional.

Jacob I y su hermano Johannes I no siempre se llevaron bien.

Johannes parece haber sido el más pendenciero de los dos, y seguramente no trató a su hermano con excesiva probidad en el problema de los isoperímetros. Los Bernoulli tomaban en una forma muy seria sus matemáticas. Algunas de sus cartas acerca de los problemas matemáticos utilizan un lenguaje tan fuerte que parece más propio de los cuatreros. En efecto, Johannes I, no sólo intentó robar las ideas de su hermano, sino que también lanzó a su propio hijo de la casa por haber obtenido un premio en la Academia francesa de Ciencias, para el cual Johannes mismo se había presentado. Al fin y al cabo, si los seres humanos racionales se excitan en un juego de naipes, ¿por qué no ha de ocurrir lo mismo con la Matemática que es infinitamente más interesante?

Jacob I tenía una predisposición mística, cosa que posee cierta significación para el estudio de la herencia de los Bernoulli, y que afloró en una forma interesante hacia el fin de su vida. Existe, cierta espiral (la logarítmica o equiangular) que se reproduce en una espiral análoga después de cada una de sus muchas transformaciones geométricas. Jacob estaba fascinado por esta repetición de la espiral, varias de cuyas propiedades descubrió, y dispuso que una espiral fuera grabada sobre su lápida con la inscripción *Eadem mutata resurgo* (Aunque cambiada, surjo la misma).

El lema de Jacob fue *Invito patre sidera verso* (contra la voluntad de mi padre estudio las estrellas), un recuerdo irónico a la vana oposición de su padre a que Jacob dedicara sus talentos a

---

[2] Notas históricas respecto a éste y a otros problemas del cálculo de variaciones, se encontrarán en el libro de G. A. Bliss, *Calculus of Variations,* Chicago. 1925.

la Matemática y a la Astronomía. Estas particularidades están en favor del concepto de la herencia del genio, y no de la educación. Si su padre hubiera vencido, Jacob hubiese sido un teólogo.

Johannes I, hermano de Jacob I, no se inició como matemático, sino como doctor en medicina. Su disputa con el hermano, que generosamente le enseñó Matemática, ha sido ya mencionada. Johannes era un hombre de violentas simpatías y antipatías. Leibniz y Euler eran sus dioses; Newton era odiado y estimado en menos. El obstinado padre intentó llevar a su hijo menor hacia los negocios familiares, pero Johannes I, siguiendo las lecciones de su hermano Jacob I, se reveló, dedicándose a la medicina y a los estudios humanistas, sin darse cuenta de que estaba luchando contra su herencia. Teniendo 18 años recibió el grado de *Magister artium*. Mucho antes se dio cuenta de su error al haber elegido la medicina, y se dedicó a la Matemática. Su primer cargo académico lo obtuvo en Groninga, en 1695, como profesor de Matemática, y a la muerte de Jacob I, en 1705, Johannes le sucedió en la, cátedra de Basilea.

Johannes I fue todavía más prolífico que su hermano en el campo de la Matemática, y difundió el Cálculo en Europa. Sus estudios abarcan la Física, la Química, y la Astronomía, aparte de la Matemática. En las ciencias aplicadas Johannes I contribuyó notablemente a los estudios de la óptica, escribió sobre la teoría de las mareas, y sobre la teoría matemática de las velas de los barcos, y enunció el principio de los desplazamientos virtuales en la mecánica. Johannes I fue un hombre de extraordinario vigor físico e intelectual, permaneciendo activo hasta pocos días antes de su muerte a la edad de 80 años.

Nicolaus I, el hermano de Jacob I y Johannes I, también tenía talento matemático. Igual que sus hermanos se inició falsamente. Teniendo 16 años recibió su título de doctor en filosofía en la Universidad de Basilea, y a los 20 años obtuvo el grado superior en Leyes. Fue primero, profesor de Leyes en Berna antes de ser miembro de la Facultad de Matemática en la Academia de San Petersburgo. Al morir, su fama era tanta que la Emperatriz Catalina hizo celebrar un funeral a expensas del Estado.

La herencia aparece curiosamente en la segunda generación. Johannes I intentó dedicar a los negocios a su hijo segundo, Daniel, pero Daniel pensó que prefería la medicina y fue médico antes dedicarse, a pesar suyo, a la Matemática. Teniendo 11 años Daniel comenzó a recibir lecciones de Matemática de su hermano Nicolaus III, que tenía cinco años más que él. Daniel y el gran Euler fueron íntimos amigos y a veces rivales cordiales. Igual que Euler, Daniel Bernoulli obtuvo el premio de la Academia Francesa 10 veces (en pocas ocasiones este premio ha sido compartido con otros aspirantes). Algunos de los trabajos mejores de Daniel se refieren a la hidrodinámica, que desarrolló partiendo del principio único que más tarde vino a ser llamada la conservación de la energía. Todos los que hoy se dedican al movimiento de los fluidos, en su estudio puro o aplicado, conocen el nombre de Daniel Bernoulli.

En 1725 (teniendo 25 años) Daniel fue nombrado profesor de Matemática en San Petersburgo, donde la relativa dureza de la vida le cansó tanto que volvió a la primera oportunidad, ocho años más tarde, a Basilea, donde fue profesor de anatomía y botánica, y finalmente de física. Sus trabajos matemáticos abarcan el Cálculo, las ecuaciones diferenciales, las probabilidades, la teoría de las cuerdas vibrantes, un ensayo de una teoría cinética de los gases y muchos otros problemas de Matemática aplicada. Daniel Bernoulli ha sido llamado el fundador de la Física matemática.

Desde el punto de vista de la herencia es interesante observar que Daniel tenía, en su naturaleza, una marcada vena de filosofía especulativa, posiblemente una sublimación refinada de la religión hugonote de sus antepasados. Esa naturaleza aflora en numerosos descendientes posteriores de los ilustres refugiados víctimas de la intolerancia religiosa.

El tercer matemático de la segunda generación, Johannes II, hermano de Nicolaus III y de Daniel, también tuvo una iniciación equivocada, siendo conducido hacia su verdadera vocación por su herencia, o posiblemente por sus hermanos. Comenzó estudiando leyes, y llegó a ser profesor de elocuencia en Basilea antes de ser el continuador de su padre en la cátedra de Matemática. Sus trabajos se refieren principalmente a la física, y se distinguió hasta el punto de obtener el premio París en tres ocasiones (una vez basta para satisfacer a cualquier buen matemático).

Johannes, III, un hijo de Johannes II, repitió la tradición de la familia, al errar en su iniciación, y al igual que su padre comenzó estudiando leyes. A la edad de 13 años se doctoró en filosofía. Teniendo 19 años, Johannes III encontró su verdadera vocación, y fue nombrado astrónomo real en Berlín. Sus estudios abarcan la astronomía, la geografía y la Matemática.

Jacob II, otro hijo de Johannes II, cometió el mismo error familiar al estudiar leyes, que subsanó cuando tenía 21 años al dedicarse a la física experimental. Se dedicó también a la Matemática, siendo miembro de la Sección de Matemática y Física en la Academia de San Petersburgo. Su muerte prematura (a la edad de 30 años) puso fin a su promisoria carrera, y en realidad no se sabe lo que Jacob II hubiera producido. Se casó con una nieta de Euler.

La lista de los Bernoulli dotados de talento matemático no queda agotada con esto, pero los otros miembros se distinguieron menos. Se suele afirmar que las cepas se agotan, pero en este caso parece lo contrario. Cuando la Matemática era el campo que más prometía a los talentos superiores, como ocurrió inmediatamente después de la invención del Cálculo, los Bernoulli de talento cultivaron la Matemática. Pero la Matemática y la ciencia son tan sólo dos de los innumerables campos de la actividad humana, y para un hombre de talento constituiría una falta de sentido práctico querer cultivar campos superhabitados. El talento de los Bernoulli no se gastó; simplemente se empleó en cosas de igual o hasta de más importancia social que la Matemática cuando el campo matemático era comparable al hipódromo de Epsom el día del Derby.

Quienes se interesen en los problemas de la herencia encontrarán abundante material en la historia de las familias Darwin y Dalton. El caso de Francis Dalton (un primo de Charles Darwin) es particularmente interesante, ya que el estudio matemático de la herencia fue fundado por él. Sería totalmente necio no valorar a los descendientes de Charles Dalton por el hecho de que hayan llegado a ocupar puestos eminentes en la Matemática o en la física-matemática y no en la biología. El genio palpitaba en ellos, y una expresión no es necesariamente mejor" o "superior" a las otras, a no ser que seamos unos fanáticos, y afirmemos que la única ocupación digna es la Matemática, la biología, la sociología, el bridge o el golf. Puede ser que el abandono de la Matemática por la familia Bernoulli sea justamente un ejemplo más de su genio.

Muchas leyendas y anécdotas se cuentan respecto a los famosos Bernoulli, cosa natural tratándose de una familia de miembros tan inteligentes y tan violentos en su lenguaje como ellos eran algunas veces. Una de las frases más conocidas, cuyos auténticos ejemplos deben ser tan antiguos, al menos, como el antiguo Egipto, y que con variantes se ha puesto en boca de toda clase de individuos eminentes, se ha atribuido también a uno de los Bernoulli. En cierta ocasión, viajando Daniel en compañía de un muchacho joven, se presentó él mismo a su simpático compañero de viaje. "Soy Daniel Bernoulli", a lo que el joven contestó sarcásticamente "Y yo soy Isaac Newton". Daniel, hacia el fin de sus días, encontró en estas palabras el más sincero tributo que hasta entonces había recibido.

Capítulo Noveno
La Encarnación del Análisis

EULER

La historia muestra que los jefes de naciones que han favorecido el cultivo de la Matemática, la fuente común de todas las ciencias exactas, son también aquellos cuyos reinos han sido los más brillantes y cuyas glorias son las más durables.

Michel Chasles

"Euler calculaba sin aparente esfuerzo como los hombres respiran o las águilas se sostienen en el aire" (como dijo Arago), y esta frase no es una exageración de la inigualada facilidad matemática de Léonard Euler (1707-1783), el matemático más prolífico de la historia y el hombre a quien sus contemporáneos llamaron, "la encarnación del Análisis". Euler escribía sus grandes trabajos matemáticos con la facilidad con que un escritor fluido escribe una carta a un amigo íntimo. Ni siquiera la ceguera total, que le afligió en los últimos 17 años de su vida, modificó esta fecundidad sin paralelo. En efecto, parece que la pérdida de la visión agudizó las percepciones de Euler en el mundo interno de su imaginación.

La extensión de los trabajos de Euler no ha sido exactamente conocida hasta 1936, pero se calcula que serían necesarios sesenta a ochenta grandes volúmenes en cuarto para la publicación de todos sus trabajos. En 1909, la Asociación Suiza de Ciencias Naturales emprendió la publicación de los diversos trabajos de Euler, con la colaboración económica de muchas personas y de sociedades matemáticas de todo el mundo, ya que Euler pertenece a todo el mundo civilizado y no solo a Suiza. El cálculo de los probables gastos (alrededor de 80.000 dólares en la moneda de 1909), tuvo que modificarse por el descubrimiento de numerosos e insospechados manuscritos de Euler, realizado en San Petersburgo (Leningrado).

La carrera matemática de Euler comienza el año de la muerte de Newton

No podía elegirse una época más propicia para un genio como el de Euler. La Geometría analítica (que se hizo pública en el año 1637) llevaba en uso 90 años, el Cálculo alrededor de 50, y la ley de la gravitación universal de Newton, la clave de la astronomía física, había sido presentada al público matemático hacía 40 años. En cada uno de estos campos había sido resuelto un vasto número de problemas aislados, habiéndose hecho ciertos ensayos de unificación, pero no existía ningún estudio sistemático que abarcara todo el complejo de las Matemáticas puras y aplicadas. En particular, los poderosos métodos analíticos de Descartes, Newton y Leibniz no habían sido aun explotados hasta el límite de lo posible, especialmente en mecánica y Geometría.

El álgebra y la Trigonometría, en un nivel inferior, podían ser ahora objeto de una sistematización y ampliación, especialmente la última. En el dominio de Fermat del análisis diofántico y de las propiedades de los números enteros comunes no era posible, ni todavía lo es, esa "perfección temporal"; pero también aquí Euler demostró ser maestro. En efecto, una de las características más notables del genio universal de Euler, fue sin igual competencia en las principales direcciones de la Matemática, la continua y la discontinua.

Como algorista, Euler jamás ha sido sobrepasado y probablemente no hay quien se le aproxime, como no sea Jacobi. Un algorista es un matemático que idea "algoritmos" (o "algorismos") para la solución de problemas de tipos especiales. Como un ejemplo muy sencillo aceptamos (o probamos) que todo número real positivo tiene una raíz cuadrada real. ¿Cómo será calculada la raíz? Se conocen varios métodos; un algorista idea métodos practicables. Además, en el análisis diofántico, y también en el Cálculo integral, la solución de un problema puede no ser hallada hasta que haya sido hecha alguna ingeniosa (muchas veces simple) sustitución de una o más de las variables por funciones de otras variables; un algorista es un matemático al que se le ocurren de un modo natural esos ingeniosos trucos. No existe un modo uniforme de proceder; los algoristas, como los versificadores fáciles, nacen, no se hacen.

Actualmente es moda despreciar a los "simples algoristas"; sin embargo, cuando un verdadero gran algorista, como el hindú Ramanuan, surge inesperadamente, hasta los analistas expertos le consideran como un don del cielo: su visión sobrenatural respecto a fórmulas al parecer no relacionadas, revela sendas ocultas que conducen desde un territorio a otro y los analistas encuentran nuevas tareas al ser abiertos nuevos campos. Una algorista es "un formalista" que ama las fórmulas bellas por sí mismas.

Antes de continuar con la pacífica pero interesante vida de Euler, debemos mencionar dos circunstancias de su época que fomentaron su prodigiosa actividad y le ayudaron a darle una dirección. En el siglo XVIII las Universidades no eran los centros principales de investigación en Europa. Pudieron hacer mucho más de lo que hicieron de no haber sido por su tradición clásica y su incomprensible hostilidad hacia la ciencia. La Matemática, por no ser suficientemente antigua, era considerada respetable, pero la física, más reciente, era sospechosa. Además, un matemático en una Universidad de la época tenía que emplear gran parte de su esfuerzo en la enseñanza elemental; sus investigaciones, si las hacía, constituían un lujo no aprovechable, precisamente como en el tipo medio de las actuales instituciones americanas de enseñanza superior. Los miembros de las Universidades británicas podían hacer lo que quisieran. Pocos, sin embargo, querían hacer algo, y lo que hacían o dejaban de hacer no afectaba a su forma de vivir. En ese estado de laxitud o de abierta hostilidad, no había razón para que las Universidades condujeran a la ciencia, y realmente no la conducían.

Este papel era desempeñado por las diversas Academias reales mantenidas por gobernantes generosos y de gran visión. Los matemáticos deben una extraordinaria gratitud a Federico el Grande de Prusia y a Catalina la Grande de Rusia por su gran liberalidad. Hicieron posible todo un siglo de progresos matemáticos en uno de los períodos más activos de la historia científica. En el caso de Euler, Berlín y San Petersburgo constituyen el nervio de la creación matemática. Estos dos focos creadores fueron inspirados por la inquieta ambición de Leibniz. Las Academias trazadas siguiendo los planes de Leibniz dieron a Euler la ocasión de ser el matemático más prolífico de todos los tiempos; así, en cierto sentido, Euler fue el nieto de Leibniz

La Academia en Berlín se había ido marchitando durante cuarenta años cuando Euler, inspirado por Federico el Grande, le dio nueva vida; y la Academia de San Petersburgo, que Pedro el Grande no llegó a organizar de acuerdo con el programa de Leibniz, quedó firmemente fundada por su sucesor. Estas Academias no eran comparables a las actuales, cuya principal función es premiar con el nombramiento de académico a aquellos individuos que se distinguen por la obra realizada. Eran organizaciones que pagaban a sus miembros principales para que se *dedicaran* a la *investigación científica*. Los sueldos y otros gajes eran lo suficientemente elevados para permitir que vivieran con cierta comodidad el académico y *su* familia. La familia de Euler se componía en cierta época de a lo menos 18 personas, y, sin embargo, le fue posible sostenerla decentemente. Por si esto fuera poco, los hijos de los académicos del siglo XVII, si eran dignos de ello, sabían que gozaban de una fácil iniciación en el mundo.

Esto nos lleva a una segunda influencia dominante sobre la vasta producción matemática de Euler. Los gobernantes que pagaban generosamente los sueldos, deseaban ver retribuidos sus afanes y su dinero con alguna cosa, aparte de la cultura abstracta, pero debe hacerse notar que cuando tales gobernantes se creían suficientemente pagados, no insistían en que sus académicos gastaran el resto de su vida dedicados a la labor "productiva". Euler, Lagrange y los otro s académicos gozaban de libertad para hacer lo que quisieran. Tampoco, se ejercía ninguna presión por el hecho de que los resultados obtenidos no pudieran ser usados inmediatamente para fines prácticos. Más sabios que muchos directores de institutos científicos actuales, los gobernantes del siglo XVIII tan sólo insinuaban algunas veces lo que necesitaban, pero dejaban que la ciencia siguiera su curso. Parece que se dieron cuenta instintivamente de que la llamada investigación "pura" puede dar lugar también a cosas que más pronto o más tarde tienen aplicación práctica.

A este juicio general hay que hacer una importante excepción que no conforma ni desecha la regla. Sucedió que en los tiempos de Euler el problema más sobresaliente de la investigación matemática, coincidía por casualidad, con el que probablemente era el problema práctico esencial de la época, el dominio de los mares. La nación cuya técnica en la navegación superara a la de todos sus competidores, sería inevitablemente la reina de los mares. La navegación es, en último análisis, un problema de determinar exactamente la posición en el mar a cientos de millas de la tierra, y aquellos marinos que mejor lo consiguieran, podrían elegir el lugar más favorable para una batalla naval. Gran Bretaña, como todos saben, gobierna los mares y los gobierna debido, en no pequeño grado, a la aplicación práctica que sus navegantes supieron hacer de las investigaciones matemáticas puras referente a la mecánica celeste, durante el siglo XVIII.

El fundador de la navegación moderna es Newton, aunque jamás este tema le diera un dolor de cabeza, y aunque a juzgar por lo que sabemos, nunca puso sus plantas sobre la cubierta de un barco. La posición en el mar se determina por la observación de los cuerpos celestes, (algunas veces se incluyen los satélites de Júpiter), y conocida la ley universal de Newton pueden determinarse, con suficiente paciencia, con un siglo de anterioridad, las posiciones de los planetas y las fases de la Luna, con cuyos datos quienes deseen gobernar los mares pueden dejar establecidos sus cálculos en los almanaques náuticos, lo que les permitirá componer los cuadros de las futuras posiciones.

En tal empresa práctica la Luna ofrece un problema particularmente difícil, el de los tres cuerpos que se atraen de acuerdo con la ley de Newton. Este problema se repetirá muchas veces al llegar el siglo XX. Euler fue el primero en dar una solución calculable para el problema de la luna ("la teoría lunar"). Los tres cuerpos a que nos referimos son la Luna, la Tierra y el Sol. Aunque demoremos, lo poco que puede decirse aquí sobre este problema hasta capítulos posteriores, haremos notar que se trata de uno de los problemas más difíciles de toda la Matemática. Euler no lo resolvió, pero su método de cálculo aproximado (sustituido actualmente por mejores métodos), fue suficientemente práctico para permitir a un calculador inglés redactar las tablas de la Luna que habría de utilizar el Almirantazgo Británico. El calculador recibió £5.000 (una bonita suma para aquel tiempo), y se votó para Euler un sueldo de £300 como retribución por su método.

Leonard (o Leonhard) Euler, hijo de Paul Euler y de Marguerite Brucker, es probablemente el hombre de ciencia más grande que Suiza ha producido. Nació en Basilea el 15 de abril de 1707, pero al año siguiente sus padres se trasladaron a la cercana aldea de Riechen, donde su padre era el pastor calvinista. Paul Euler, un excelente matemático, discípulo de Jacob Bernoulli, quiso que Leonard siguiera sus pasos y le sucediera en la iglesia de la aldea, pero por fortuna cometió el error de enseñarle al muchacho la Matemática.

El joven Euler conoció pronto lo que quería hacer. De todos modos obedeció a su padre e ingresó en la Universidad de Basilea para estudiar teología y hebreo. En Matemática se hallaba suficientemente avanzado para atraer la atención de Johannes Bernoulli, que generosamente daba al joven una lección semanal. Euler empleaba el resto de la semana preparando la siguiente lección, con el objeto de que el número de problemas que tuviera que plantear a su profesor fuera el menor posible. Pronto, su inteligencia y marcada capacidad fueron observadas por Daniel y Nicolaus Bernoulli, quienes se hicieron buenos amigos de Euler.

Leonard pudo seguir estos estudios hasta obtener su título de maestro en 1724, teniendo 17 años. En ese momento, su padre insistió en que debía abandonar la Matemática y dedicarse totalmente a la teología. Mas el padre cedió cuando los Bernoulli le dijeron que su hijo estaba destinado a ser un gran matemático, y no el pastor de Riechen. Aunque la profecía se cumplió, la precoz educación religiosa de Euler influyó sobre toda su vida, y nunca pudo deshacerse de una partícula de su fe calvinista. En efecto, a medida que los años pasaban viró en redondo hacia donde su padre intentó dirigirle; dirigía los rezos familiares y de ordinario los terminaba con un sermón.

El primer trabajo independiente de Euler fue realizado cuando tenía 19 años. Se dice que este primer esfuerzo revela tanto el punto fuerte como el débil de la obra subsiguiente de Euler. La Academia de París propuso el tema de las arboladuras de los barcos como problema correspondiente al año 1727. Euler no ganó el premio, pero recibió una mención honorífica. Más tarde se resarció de esta pérdida ganando el premio doce veces. Su punto fuerte era el Análisis, la Matemática técnica; su punto débil, la falta de relación de su obra con las aplicaciones prácticas. Esto no puede sorprender cuando recordamos las bromas tradicionales referentes a la no existente Marina suiza. Euler pudo haber visto una o dos barcas en los lagos suizos, pero no había visto aún un barco. Ha sido criticado, algunas veces justamente, por dejar que su Matemática se alejara del sentido de la realidad. El universo físico era una ocasión que se daba a Euler para aplicar la Matemática, y si el universo no estaba de acuerdo con su análisis era el universo el que estaba errado.

Dándose cuenta de que había nacido para la Matemática, Euler se preparó para ser profesor en Basilea. No habiendo logrado su propósito, continuó sus estudios movido por la esperanza de unirse a Daniel y Nicolaus Bernoulli en San Petersburgo. Sus amigos le habían ofrecido generosamente que le encontrarían un cargo bien rentado en la Academia

En esta fase de su carrera, parece que le era indiferente a Euler la elección del tema, siempre que se tratara de algo científico. Cuando los Bernoulli le hablaron de la posibilidad de que tuviera un puesto sección médica de la Academia de San Petersburgo, Euler se dedicó a estudiar fisiología en Basilea y asistió a cursos de medicina. Pero hasta en este campo, no podía alejarse de la Matemática. La fisiología del oído le sugirió la investigación matemática del sonido, que, a su vez le llevó al estudio de la propagación de las ondas, y así sucesivamente. Los Bernoulli eran hombres que cumplían su palabra. Euler fue llamado a San Petersburgo en 1727, incorporado a la Sección Médica de la Academia. Por una sabia disposición todos los miembros extranjeros estaban obligados a admitir los discípulos que siguieran las enseñanzas. El gozo del pobre Euler pronto se desvaneció. El día que puso el pie en suelo ruso moría la liberal Catalina I.

Catalina, amante del Pedro el Grande, antes de ser su esposa, parece haber sido una mujer de mente amplia por más de un concepto, y fue ella la que en su reinado, de sólo dos años, llevó a la práctica el deseo de Pedro de establecer la Academia. A la muerte de Catalina, el poder pasó a manos de una facción brutal, durante la minoría del joven Zar (que quizá para su bien murió antes de que pudiera comenzar a reinar). Los nuevos gobernantes de Rusia consideraron la Academia como un lujo costoso y durante algunos meses contemplaron la posibilidad de suprimirla, repatriando a los miembros extranjeros. Este era el momento en que Euler llegó a San Petersburgo. En la confusión del momento nada se dijo respecto al cargo para el cual Euler había sido llamado, y entonces ingresó en la sección matemática, después de haber aceptado en su desesperación, el nombramiento de teniente naval.

Más tarde las cosas marcharon mejor y Euler comenzó a trabajar. Durante seis años, no se separó de sus trabajos, no sólo por la pasión absorbente que sentía para la Matemática, sino también porque no se atrevía a dedicarse a una vida social normal por temor a los espías que por todas partes.

En 1733 Daniel Bernoulli volvió a la libre Suiza, cansado de la santa Rusia, y Euler, teniendo 26 años, ocupó su puesto en la sección matemática en la Academia. Suponiendo que permanecería en San Petersburgo durante el resto de su vida, Euler decidió casarse y hacer las cosas lo mejor que pudiera. Su esposa era hija del pintor Gsell a quien Pedro el Grande había llevado a Rusia. Las condiciones políticas empeoraron, y Euler sintió la desesperada ansia de escapar. Pero con la rápida llegada de los hijos en rápida sucesión, Euler se sintió más atado que antes, refugiándose en una incesante labor. Algunos biógrafos atribuyen la fecundidad incomparable de Euler a esta primera permanencia en Rusia; la prudencia le forzó a este hábito de trabajo incesante.

Euler fue uno de los grandes matemáticos que podía trabajar en cualquier condición. Amaba los niños (tuvo trece, aunque cinco de ellos murieron siendo pequeños), y podía dedicarse a sus trabajos teniendo a alguno de sus hijos sentado sobre sus rodillas y a los restantes jugando en torno de él. La facilidad con que resolvía los problemas más difíciles es increíble.

Muchas son las anécdotas que se cuentan de su constante flujo de ideas. No hay duda de que algunas son exageraciones, pero se dice que Euler podía terminar un trabajo matemático en la media hora que transcurría desde que era llamado a la mesa hasta que comenzaba a comer. En cuanto terminaba un trabajo era colocado sobre el montón de hojas que esperaba la impresión. Cuando se necesitaba material para los trabajos de la Academia, el impresor elegía una hoja del montón de papeles. En consecuencia, se observa que la fecha de publicación no suele corresponder a la de la redacción. Este desorden todavía se hacía mayor debido a la costumbre de Euler de volver muchas veces sobre el mismo tema para aclararlo o ampliar lo que ya había escrito. Por tanto, una serie de trabajos sobre un determinado tema suele ser interrumpida por otras investigaciones sobre temas diferentes.

Cuando el joven Zar murió, Anna Ivanovna (sobrina de Pedro), fue Emperatriz en el año 1730, y por lo que se refiere a la Academia las cosas se aclararon considerablemente. Pero bajo el gobierno indirecto del amante de Anna, Ernest John de Biron, Rusia sufrió una de las épocas de terror más tremendo de su historia, y Euler se dedicó durante diez años a una labor silenciosa. Por entonces sufrió su primera gran desventura. Deseoso de obtener el premio París, para el cual se había propuesto un problema astronómico que exigió a los matemáticos más conspicuos varios meses de labor (un problema similar relacionado con Gauss se explicará en el lugar correspondiente), Euler trabajó tanto que lo resolvió en tres días. Pero el prolongado esfuerzo le produjo una enfermedad de cuyas consecuencias perdió la visión del ojo derecho.

Haremos notar que la crítica moderna, que se ha dedicado a desacreditar todas las anécdotas interesantes de la historia de los matemáticos, demostró que el problema astronómico no tuvo la menor responsabilidad en la pérdida del ojo de Euler. Pero como la crítica erudita (o cualquiera otra) debe saber mucho acerca de la llamada ley dio causa y efecto, el misterio debería ser resuelto por el espíritu de David Humo (un contemporáneo de Euler). Con esta precaución narraremos una vez más la famosa historia de Euler y el ateo (o quizá sólo panteísta) filósofo francés Denis Diderot (1713-1784), si bien nos apartamos algo del orden cronológico, pues el suceso tuvo lugar durante la segunda permanencia de Euler en Rusia.

Invitado por Catalina la Grande para visitar su corte, Diderot se ganaba el sustento intentado convertir al ateísmo a los cortesanos, pero Catalina encargó a Euler de que tapara la boca al infatuado filósofo. Esto era fácil, pues la Matemática era chino para Diderot. De Morgan cuenta lo sucedido en su clásico *Budgel of Paradoxes*, 1872: "Diderot fue informado de que un docto matemático estaba en posesión de una demostración algebraica de la existencia de Dios, y que la expondría ante toda la corte si él deseaba oírla. Diderot consintió amablemente... Euler avanzó hacia Diderot y dijo gravemente en un tono de perfecta convicción:

"Señor, $\dfrac{a+b^n}{n} = x$ *, por tanto Dios existe. Replique".*

Humillado por la risa no contenida que saludó a su embarazoso silencio, el pobre hombre pidió permiso a Catalina para volver inmediatamente a Francia, permiso que le fue graciosamente concedido.

No contento con esta obra maestra, Euler añadió gravemente las pruebas solemnes de que Dios existe, y de que el alma no es una sustancia material. Se dice que ambas pruebas fueron incorporadas a los tratados de teología de la época. Se trata probablemente de flores escogidas de la faceta matemática no práctica de su genio.

La Matemática no es lo único que absorbió las energías de Euler durante su permanencia en Rusia. Siempre que fue solicitado para ejercer sus talentos matemáticos en terrenos alejados de la Matemática pura, accedió a la solicitación. Euler escribió los manuales matemáticos elementales para las escuelas rusas, el departamento oficial de geografía, ayudó a reformar el sistema de pesas y medidas, etc. Estas fueron algunas de sus actividades. Aparte de esta obra ajena a la Matemática, Euler continuó sus investigaciones favoritas.

Una de las obras más importantes de este período fue el tratado de 1736 sobre mecánica. Obsérvese que a la fecha de publicación le falta un año para coincidir con el centenario de la publicación de la Geometría analítica de Descartes. El tratado de Euler hizo para la mecánica lo que el de Descartes hizo para la Geometría, libertarla de las cadenas de la demostración sintética, haciéndola analítica. Los Principia de Newton pudieron haber sido escritos por Arquímedes; la mecánica de Euler no pudo ser

escrita por un griego. Por primera vez el gran poder del Cálculo infinitesimal fue dirigido hacia la mecánica, y entonces comienza la era moderna para esa ciencia básica. Euler fue superado en esta dirección por su amigo Lagrange, pero el mérito de haber dado el paso decisivo corresponde a Euler.
A la muerte de Anna, en 1740, el gobierno ruso se hizo más liberal, pero Euler ya estaba fatigado, y aceptó con satisfacción la invitación de Federico el Grande para que se incorporara a la Academia de Berlín. La reina viuda tomó cariño a Euler e intentó sonsacarle. Todo lo que pudo obtener fueron monosílabos.

"¿Por qué no queréis hablarme?" le preguntó.
"Señora - replicó Euler- vengo de un país donde al que habla se le ahorca".

Los 24 años siguientes de su vida transcurrieron en Berlín, y no fueron muy felices, pues Federico hubiera preferido a un pulido cortesano en lugar del sencillo Euler. Aunque Federico creía que su deber era fomentar la Matemática, se desvió de ese deseo. Pero demostró que apreciaba en muchos los talentos de Euler al proponerle problemas prácticos, el sistema monetario, la conducción de aguas, los canales de navegación, sistemas y cálculos de pensiones, entre otros.
Rusia jamás olvidó a Euler completamente y mientras estuvo en Berlín le pagó parte de su sueldo. A pesar de que su familia era numerosa Euler vivió prósperamente y poseía una casa de campo cerca de Charlottenburg además de su casa de Berlín. Durante la invasión rusa en 1760, la casa de campo de Euler fue saqueada. El general ruso declaró que "no hacía la guerra a la ciencia", e indemnizó a Euler con una cantidad superior a la que representaba el verdadero daño. Cuando la Emperatriz Isabel oyó hablar de la pérdida de Euler, le envió una cuantiosa suma, aparte de la más que suficiente indemnización.
Una causa de la falta de popularidad de Euler en la corte de Federico fue su incapacidad para oponer argumentos a las cuestiones filosóficas, que le eran totalmente desconocidas. Voltaire, que empleó gran parte de su tiempo adulando a Federico, se divertía, con los otros brillantes verbalistas que rodeaban al Emperador, en hacer caer al infeliz Euler en los enredos metafísicos. Euler lo admitía sin resistencia, y se unía a los demás en sus risas por sus ridículos disparates. Pero Federico se irritaba cada vez más, Y pensó en un filósofo más agudo para encabezar su Academia y entretener a su corte.
D'Alembert (de quien hablaremos más tarde) fue invitado a Berlín para examinar la situación. Él y Euler tenían ligeras diferencias respecto a la Matemática; pero D'Alembert no era el hombre a quien un entredicho personal enturbiaba el juicio, y contestó a Federico diciéndole que sería un ultraje colocar a cualquier otro matemático por encima de Euler. Esta respuesta tan sólo dio lugar a que Federico se irritara más que antes, y las condiciones se hicieron intolerables para Euler. Pocas probabilidades de triunfo esperaban a sus hijos en Prusia, y a la edad de 50 años (en 1776), volvió a hacer su equipaje y se dirigió nuevamente a San Petersburgo, invitado cordialmente por Catalina la Grande.
Catalina recibió al matemático como si fuera un noble y le hizo preparar una espléndida casa y para él y los 18 miembros de su familia, cediéndole uno de sus propios cocineros.
Por esta época Euler comenzó a perder (por una catarata), la visión del ojo que le quedaba. La progresión de su ceguera fue seguida con alarma y consternación por Lagrange, D’Alembert y otros eminentes matemáticos de la época. Euler mismo sentía aproximarse su ceguera con serenidad. No hay duda de que su profunda fe religiosa le ayudaba a enfrentarse con lo que era superior a él. Pero no se resignaba al silencio y a la oscuridad, e inmediatamente se dedicó a reparar lo irreparable.

Antes de que se apagara el último rayo de luz, se habituó a escribir sus fórmulas con yeso en una gran pizarra. Luego, sus hijos, (particularmente Alberto) actuaban de amanuenses, y el padre dictaba las palabras y explicaba las fórmulas. En lugar de disminuir, su producción matemática aumentó.

Toda su vida, Euler gozó de una memoria fenomenal. Sabía de memoria la Eneida de Virgilio, y aunque desde su juventud rara vez había vuelto a releer la obra, podía siempre decir cuál era la primera y la última línea de cada página de su ejemplar. Su memoria era visual y auditiva. También tenía una capacidad prodigiosa para el cálculo mental, no sólo del tipo aritmético, sino también del tipo más difícil exigido en el álgebra superior y en el Cálculo infinitesimal. Las fórmulas principales de toda la Matemática existente en su época, estaban cuidadosamente grabadas en su memoria.

Como un ejemplo de esta capacidad, Condorcet cuenta que dos de los discípulos de Euler habían sumado una complicada serie convergente (para un valor particular de la variable) con 17 términos, y sólo estaban en desacuerdo en una cifra del lugar decimoquinto del resultado. Para decidir cuál era la suma exacta Euler realizó todo el cálculo mentalmente, y su respuesta fue la exacta. Esta memoria venía en su ayuda para consolarle de su ceguera. La teoría lunar - el movimiento de la Luna, el único problema que habla producido dolores de cabeza a Newton, recibió por entonces una completa solución al ser tratada por Euler. Todo el complicado análisis fue hecho de memoria.

A los cinco años de haber vuelto a San Petersburgo le aconteció otro desastre. En el gran fuego de 1771 su casa y todos sus muebles quedaron destruidos, y gracias al heroísmo de su sirviente suizo (Peter Grimm, o Grimmon), Euler logró salvarse con el riesgo de su propia vida, Grimm pudo arrastrar a su amo, ciego y enfermo, fuera de las llamas. La biblioteca se quemó pero gracias a la energía del Conde Orloff fueron salvados todos los manuscritos de Euler. La Emperatriz Catalina prontamente reparó todos los daños, y Euler volvió a sus trabajos.

En 1776 (cuando tenía 69 años) Euler sufrió una gran pérdida con la muerte de su mujer. Al año siguiente volvió a casarse. La segunda mujer, Salomé Abigail Gsell, era media hermana de la primera. Su gran tragedia fue el fracaso de una operación para restablecer la visión de su ojo izquierdo, el único del que podían abrigarse esperanzas. La operación había sido eficaz, y la alegría de Euler fue inenarrable. Pero se presentó una infección, y después de un prolongado sufrimiento, Euler volvió a sumirse en la obscuridad.

Al examinar retrospectivamente la enorme producción de Euler podemos sentirnos inclinados a creer que cualquier hombre de talento podría haber hecho una gran parte de ese trabajo casi tan fácilmente como Euler. Pero un examen de la Matemática actual pronto nos mostrará nuestro error. En el estado presente, la Matemática, con sus bosques de teorías, no es más complicada que antes, si consideramos el poder los métodos que ahora tenemos a nuestra disposición, y de que Euler no disponía, y ahora está ya madura para un segundo Euler. En su época, Euler sistematizó y unificó los resultados parciales y los teoremas aislados, desbrozando el terreno y asociando todas las cosas de valor con la fácil capacidad de su genio analítico. Mucho de lo que hoy se enseña en los cursos elementales de Matemática se debe prácticamente a Euler, por ejemplo, la teoría de secciones cónicas y cuadráticas en el espacio tridimensional desde el punto de vista unificado proporcionado por la ecuación general de segundo grado. Además, la cuestión de las anualidades, y todos los problemas que en ella se deducen (seguros, pensiones a la vejez, etc.), fueron planteados en la forma que hoy los estudiosos conocen con el nombre de "teoría matemática de las inversiones" de Euler.

Como Arago señala, una causa del gran e inmediato triunfo de Euler como maestro se debe a su falta total de falso orgullo. Cuando ciertos trabajos de mérito intrínseco relativamente escaso eran necesarios para aclarar otras investigaciones anteriores y más importantes, Euler no dudaba en realizarlos, sin temor de que disminuyera su reputación.

Hasta en la faceta creadora Euler combinó la enseñanza con el descubrimiento. Sus grandes tratados de 1748, 1755, y 1768 -70, sobre el cálculo (*Introductio in analysin infinitorum; Institutiones calculi differentialis; Institutiones calculí integralis)* se hicieron rápidamente clásicos, y continuaron, durante tres cuartos de siglo, inspirando a los jóvenes que iban a ser grandes matemáticos. Pero fue en su obra sobre el cálculo de variaciones *(Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive propietate gaudentes, 1744),* donde Euler se reveló, por primera vez, como un matemático de primera categoría. La importancia de esta cuestión ha sido señalada en capítulos anteriores.

Ya hemos hablado del gran paso de Euler cuando hizo analítica a la mecánica; cualquier estudioso de la dinámica rígida está familiarizado con el análisis de las rotaciones de Euler, por sólo citar un detalle de sus progresos. La mecánica analítica es una rama de la Matemática pura, de modo que Euler no estuvo tentado en este caso, como en alguna de sus fugas hacia el terreno práctico, de escapar por la tangente para volver al infinito campo del Cálculo puro. Las más grandes críticas que los contemporáneos de Euler hicieron de su obra, se referían a su ingobernable impulso de calcular simplemente por el objeto de realizar un bello análisis. Alguna vez es posible que haya carecido de la suficiente comprensión de la situación real, y haya intentado reducirla al cálculo sin ver lo que existía de verdad en ella. De todos modos, las ecuaciones fundamentales del movimiento de los fluidos, que se usan actualmente en hidrodinámica, son de Euler. Supo ser práctico cuando la situación práctica era digna de su meditación.

Una peculiaridad del análisis de Euler debe ser mencionada en este lugar, pues fue la causa de una de las principales direcciones de la Matemática del siglo XIX. Era su reconocimiento de que a no ser que una serie infinita sea *convergente*, su uso no es seguro. Por ejemplo, por una larga división encontramos:

$$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\ldots$$

y la serie se continúa indefinidamente. Para $x = 1/2$, se tiene:

$$-2 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots = 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

El estudio de la convergencia (que será expuesto en el capítulo sobre Gauss) nos enseña a evitar absurdos como éste. (Véase también el capítulo sobre Cauchy). Lo curioso es que aunque Euler reconoció la necesidad de ser cauteloso al tratar con procesos infinitos, fue incapaz de tener esa cautela en gran parte de su obra. Su fe en el Análisis era tan grande que podía algunas veces buscar una "explicación absurda" para hacer aceptable un absurdo evidente.

Debemos añadir aún que pocos han igualado o se han aproximado a Euler en la cantidad de sólidos y nuevos trabajos de importancia esencial. Los que gustan de la Aritmética, reconocerán a Euler, en el análisis diofántico, méritos análogos a los que pueden atribuirse a Fermat y al mismo Diofanto. Euler fue el primero, y posiblemente el más grande de los universalistas matemáticos.

Euler no fue solamente un matemático; en literatura y en todas las otras ciencias, incluyendo la biología, era también muy ducho. Pero hasta cuando gozaba recitando su *Eneida*, Euler no podía menos de buscar en ella un problema merecedor de ser abordado por su genio matemático. El verso "El ancla desciende, la quilla que avanzaba se detiene", le estimula a trabajar sobre el movimiento del barco en tales circunstancias. Su curiosidad omnívora le llevó a estudiar durante cierto tiempo astrología, pero demostró que no la había digerido cuando cortésmente se negó a establecer el horóscopo del príncipe Iván al ordenársele hacerlo así en 1740, advirtiendo que los horóscopos correspondían al astrónomo de la corte; y el pobre astrónomo tuvo que hacerlo.

Una obra del período en que estuvo en Berlín revela a Euler como un escritor lleno de gracia, aunque también demasiado piadoso: las conocidas *Cartas a una Princesa Alemana*, escritas para dar lecciones de mecánica, óptica, física, astronomía, sonido, etc., a la sobrina de Federico la Princesa de Anhalt-Dessau. Las famosas cartas se hicieron muy populares, circulando en forma de libro en siete idiomas. El interés del público por la ciencia no es de tan reciente desarrollo como algunas veces estamos inclinados a imaginarnos.

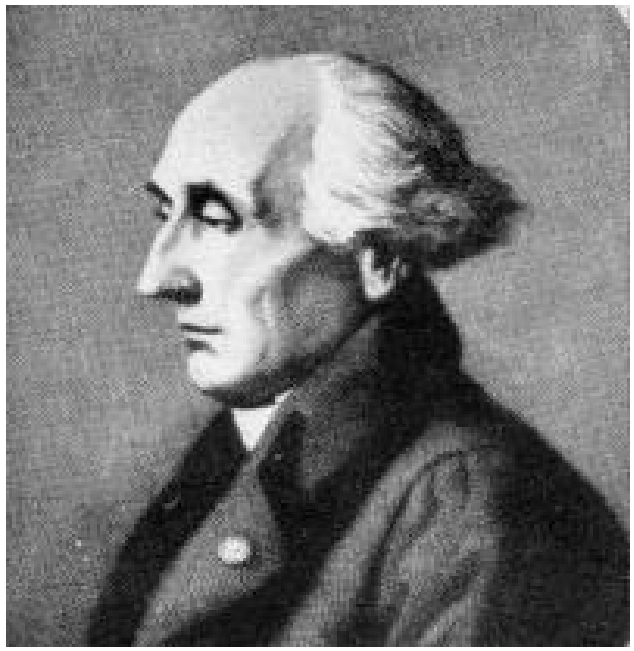
Euler mantuvo una mente viril y poderosa, hasta el momento de su muerte, que tuvo lugar cuando tenía 77 años, el 18 de septiembre de 1783. Después de haberse divertido una tarde calculando las leyes del ascenso de los globos, sobre su pizarra, como de ordinario, cenó con Lexell y su familia. "El planeta de Herschel" (Urano) era un descubrimiento reciente; Euler bosquejó el cálculo de su órbita. Poco después pidió a su nieto que se acercara. Mientras jugaba con el niño y bebía una taza de té, sufrió un ataque. La pipa cayó de su mano, y con las palabras “Me muero”, “Euler cesó de vivir y de calcular”[1].

---

[1] La cita procede del *Eloge*, de Condorcet

Capítulo Décimo
UNA INMENSA PIRÁMIDE

LAGRANGE



Yo no sé.
J. L. Lagrange

"Lagrange es la inmensa pirámide de la ciencia matemática". Esto era lo que Napoleón Bonaparte decía del más grande y más modesto matemático del siglo XVIII, Joseph Louis Lagrange (1736-1813), a quien nombró Senador, Conde del Imperio y gran Oficial de la Legión de Honor. El rey de Cerdeña y Federico el Grande, también honraron a Lagrange, pero no tan generosamente como el imperial Napoleón.

Lagrange tenía sangre mixta de francés e italiano, predominando la sangre francesa. Su abuelo, un capitán de caballería francés, entró al servicio de Carlos Manuel II, Rey de Cerdeña, y establecido en Turín emparentó, por matrimonio, con la ilustre familia Conti. El padre de Lagrange, Tesorero de guerra en Cerdeña, casó con María Teresa Gros, la única hija de un rico médico de Cambiano, con quien tuvo once hijos. De su numerosa prole, tan sólo el menor, Joseph Louis, que nació el 25 de enero de 1736, llegó a sobrevivir. El padre era rico, tanto por él como por su mujer. Era también un incorregible especulador, y en la época en que su hijo podría haber heredado la fortuna, no quedaba ya nada digno de ser heredado. En su vida ulterior Lagrange consideraba este desastre como el suceso más feliz de su vida: "Si hubiera heredado una fortuna, probablemente no me habría dedicado a la Matemática".

Lo primero que interesó a Lagrange en sus estudios escolares fueron las lenguas clásicas, y constituyó una casualidad que se desarrollara en él una pasión por la Matemática. Siguiendo sus estudios del griego y del latín pudo familiarizarse con los trabajos geométricos de Euclides y Arquímedes, que no parece le

impresionaron grandemente. Más tarde, un ensayo de Halley (amigo de Newton), ensalzando la superioridad del Cálculo sobre los métodos geométricos sintéticos de los griegos cayó en las manos del joven Lagrange. Quedó cautivado y convencido. En muy poco tiempo llegó a dominar, sin necesidad de maestro, lo que entonces constituía el Análisis moderno. A los 16 años (según Delambre puede haber aquí una ligera inexactitud), Lagrange fue nombrado profesor de Matemática en la Real Escuela de Artillería de Turín. Entonces comenzó una de las más brillantes carreras en la historia de la Matemática.
Desde el principio Lagrange fue un analista, jamás un geómetra. En él vemos el primer ejemplo notable de esa especialización que viene a constituir casi una necesidad en la investigación matemática. Las preferencias analíticas de Lagrange se manifiestan notablemente en su obra maestra, la *Mécanique analytique*, que proyectó en Turín cuando tenía 19 años, pero que fue publicada en París en el año 1788, cuando Lagrange tenía 52. "En esta obra no se encontrará ninguna figura", dice en el prefacio. Pero con un semihumorístico sacrificio a los dioses de la Geometría hace notar que la ciencia de la mecánica puede ser considerada como la Geometría de un espacio de cuatro dimensiones, tres coordenadas cartesianas con una coordenada del tiempo son suficientes para localizar una partícula en movimiento en el espacio y en el tiempo, una forma de considerar la mecánica que se ha hecho popular desde 1915, cuando Einstein la explotó en su relatividad general.
El estudio analítico de la mecánica hecho por Lagrange marca la primera ruptura completa con la tradición griega. Newton, sus contemporáneos y sus inmediatos sucesores consideraron útiles las figuras en sus estudios de los problemas mecánicos; Lagrange mostró que mayor flexibilidad y una fuerza incomparablemente mayor se alcanzan cuando se emplean desde el principio métodos analíticos generales.
En Turín, el joven profesor explicaba a estudiantes de mayor edad que él. Por entonces organizó una sociedad de investigaciones de la cual habría de nacer la Academia de Ciencias de Turín. El primer volumen de las memorias de la Academia fue publicado en 1759, cuando Lagrange tenía 23 años. Suele decirse que el modesto Lagrange fue en realidad el autor de muchos trabajos matemáticos que otros autores se apropiaron. Un trabajo publicado por Foncenex era tan bueno que el Rey de Cerdeña encargó al supuesto autor del Ministerio de Marina. Los historiadores de la Matemática se han sorprendido algunas veces de que Foncenex jamás estuvo a la altura de su primer triunfo matemático. Lagrange publicó una memoria sobre máximos y mínimos (el cálculo de variaciones explicado en los capítulos IV y VII) en la que promete tratar el tema en una forma de la cual deducirá toda la mecánica, tanto de sólidos como de fluidos. Así, a los 23 años, realmente antes, Lagrange imaginó su obra maestra, la *Mécanique analytique*, que es para la mecánica en general lo que la ley de la gravitación universal es para la mecánica celeste. Escribiendo, diez años más tarde, al matemático francés D'Alembert (1717-1783), Lagrange dice que considera esa primera obra, el cálculo de variaciones, elaborada cuando tenía 19 años, como su obra maestra. Por medio de este cálculo Lagrange unificó la mecánica, y como Hamilton dice, hizo de ella "una especie de poema científico".
Cuando se comprende, el método de Lagrange es casi una perogrullada. Como algunos han notado, las ecuaciones de Lagrange que dominan la mecánica son el mejor ejemplo del arte de hacer alguna cosa de la nada. Pero si reflexionamos un momento, veremos que cualquier principio científico capaz de unir todo un vasto universo de fenómenos debe ser sencillo: sólo un principio de máxima simplicidad puede dominar una multitud de diversos problemas que hasta después de una inspección detenida parecen ser individuales y diferentes.

En el mismo volumen de las memorias de Turín, Lagrange da otro gran paso hacia delante: aplica el Cálculo diferencial al de probabilidades. Como si esto no fuera bastante, el joven gigante de 23 años va más allá de Newton con una teoría matemática del sonido completamente diferente, que coloca esa teoría bajo el imperio de la mecánica de los sistemas de partículas elásticas (más bien que de la mecánica de los fluidos), al considerar el comportamiento de todas las partículas del aire en línea recta bajo la acción de un choque transmitido siguiendo la línea de partícula a partícula. Continuando la misma dirección, plantea también una aguda controversia que tuvo lugar durante años entre los matemáticos eminentes acerca de la fórmula matemática correcta del problema de una cuerda vibrante, un problema de fundamental importancia en la teoría de las vibraciones. A los 23 años Lagrange era considerado a un nivel igual que los grandes matemáticos de la época, Euler y los Bernoulli.

Euler supo siempre apreciar generosamente la obra de los demás. La forma como trató a su joven rival Lagrange es uno de los casos más delicados de desinterés en la historia de la ciencia. Teniendo 19 años Lagrange envió a Euler algunos de sus trabajos, y el famoso matemático reconoció sus méritos y alentó al brillante joven para que continuara. Cuando cuatro años más tarde Lagrange comunicó a Euler el método exacto para tratar el problema de los isoperímetros (el cálculo de variaciones aludido al referirnos a los Bernoulli), que desconcertó a Euler con sus métodos semigeométricos durante muchos años, éste escribió al joven diciendo que el nuevo método le había permitido vencer sus dificultades. Y en lugar de apresurarse a publicar la solución tan largo tiempo buscada, Euler esperó hasta que Lagrange lo hiciera, “para no privaros de una parte de la gloria que os corresponde”

Por halagadoras que fueran las cartas privadas, poco podían ayudar a Lagrange. Dándose cuenta de ello, Euler, cuando publicó su obra (después de hacerlo Lagrange), decía que las dificultades fueron insuperables hasta que Lagrange mostró la forma de vencerlas. Finalmente, para terminar su obra, Euler hizo elegir a Lagrange miembro extranjero de la Academia de Berlín el 2 de octubre de 1759, a la edad extraordinariamente precoz 23 años. Este reconocimiento oficial en el extranjero fue una gran ayuda para Lagrange en su patria. Euler y D'Alembert pensaron llevar a Lagrange a Berlín. En parte por razones personales, estaban deseosos de ver a su brillante y joven amigo instalado corno matemático de la corte en Berlín. Después de largas negociaciones lograron su objeto, y el Gran Federico, que había permanecido al margen de la discusión, tuvo una alegría infantil y justificable.

De pasada debemos decir algo acerca de D'Alembert, el devoto amigo y generoso admirador de Lagrange, aunque sólo sea por el contraste que ofrece un aspecto de su carácter con el del presumido Laplace de quien hablaremos más tarde.

Jean le Ronde D’Alembert, tomó su nombre de la pequeña capilla de St. Jean le Rond, cercana a Notre Dame en París. Hijo ilegítimo del caballero Destouches, D'Alembert había sido abandonado por su madre en las gradas de St. Jean le Rond. Las autoridades parisienses entregaron al niño sin padres a la mujer de un pobre vidriero, que lo crió como si fuera propio. La ley obligó al caballero a que pagara la educación de su bastardo. La madre real de D'Alembert sabía dónde se hallaba éste, y cuando el muchacho mostró los primeros signos de ser un genio, quiso recobrarlo.

"Tan sólo sois mi madrastra", respondió el muchacho, "la mujer del vidriero es mi verdadera madre", y con estas palabras rechazó a su propia carneo y a su propia sangre, del mismo modo como la madre le había abanado a él.

Cuando se hizo famoso y llegó a ser una gran figura en la ciencia francesa D’Alembert quiso pagar de alguna forma al vidriero y a su mujer, aunque no lo necesitaban, pues preferían seguir viviendo en su humilde barrio, y siempre se sintió orgulloso de considerarlos como padres. Aunque no disponemos de espacio para estudiar su figura aparte de la de Lagrange, debemos mencionar que D'Alembert fue el primero en dar una solución completa al importante problema de la precesión de los equinoccios. Su obra puramente matemática más importante se refiere a las ecuaciones en derivadas parciales, particularmente en relación con las cuerdas vibrantes, D'Alembert alentó al modesto joven para; que abordara difíciles e importantes problemas. Tomó también a su cargo hacer algunas observaciones razonables a Lagrange, acerca de su salud que no era buena.

Lagrange, en efecto, había perturbado su digestión por una conducta irracional entre los 16 y 26 años, y en toda su vida posterior se vio forzado a disciplinarse severamente, sobre todo en lo que se refería al excesivo trabajo. En una de sus cartas D'Alembert advierte al joven por el abuso que hacía del té y del café para mantenerse despierto; en otra llama la atención de Lagrange hacia un reciente libro de medicina sobre las enfermedades de los estudiosos. A todo ello Lagrange replica alegremente que se siente bien y trabaja corno un loco. Pero al fin paga su tributo.

En cierto aspecto la carrera, de Lagrange tiene un curioso paralelo con la de Newton. Hacia la mitad de su vida, la prolongada concentración sobre problemas de primera magnitud embotó el entusiasmo de Lagrange, y aunque su mente permaneció tan poderosa como siempre, llegó a considerar a la Matemática con indiferencia. Cuando sólo tenía, 45 años escribe a D'Alembert. “Comienzo a sentir que la presión de mi inercia aumenta poco a poco, y no puedo decir lo que haré en la Matemática dentro de 10 años. Me parece también que la mina es ya demasiado profunda, y a no ser que se descubran nuevas venas tendrá que ser abandonada”

Cuando escribía esto Lagrange estaba enfermo y melancólico. De todos modos expresa la verdad en lo que a él mismo se refiere. En la última de D'Alembert (septiembre 1783) a Lagrange, escrita un mes antes de su muerte, aquél repite sus primeros consejos, y le aconseja trabajar como único remedio para sus males psíquicos: "En nombre de Dios, no renunciéis al trabajo, la más fuerte de todas las distracciones. Adiós, quizá por última vez. Recordad al hombre que mas os ha estimado y honrado en el mundo.

Felizmente para la Matemática, la negra depresión de Lagrange, con su ineludible corolario de que ningún conocimiento humano es digno de esfuerzo, iba a ser seguida de 20 años gloriosos cuando D’Alembert y Euler pensaban llevar a Lagrange a Berlín. Entre los grandes problemas que Lagrange abordó y resolvió antes de ir a Berlín se halla el del movimiento de libración de la Luna. ¿ Por qué la Luna presenta siempre la misma “cara” a la Tierra dentro de ciertas ligeras irregularidades que pueden ser explicadas? Era necesario deducir este hecho de la ley de la gravitación de Newton. El problema es un ejemplo del famoso de los tres cuerpos, en este caso la Tierra, el Sol y la Luna, que recíprocamente se atraen entre sí siguiendo la ley de la razón inversa al cuadrado de la distancia entre sus centros de gravedad. (Este problema será tratado con más extensión al ocuparnos de Poincaré.

Por su solución del problema de la libración, Lagrange obtuvo el Gran Premio de la Academia Francesa de Ciencias, en 1764, cuando sólo tenía 28 años.

Alentado por este brillante triunfo de la Academia propuso un problema aún más difícil, por cuya resolución Lagrange volvió a obtener el premio en 1766. En los días de Lagrange tan sólo habían sido descubiertos cuatro satélites de Júpiter. El sistema de Júpiter (Júpiter, el Sol y sus satélites) era, pues, un problema de seis cuerpos. La completa solución matemática todavía hoy es imposible en una forma adaptada al cómputo exacto; pero usando los métodos de aproximación, Lagrange realizó un notable progreso, explicando las desigualdades observadas.

Tales aplicaciones de la teoría de Newton fueron una de las cosas que despertaron mayor interés en la vida activa de Lagrange. En 1772 volvió a obtener el premio París por su memoria sobre el problema de los tres cuerpos, y en 1774 y en 1778, tuvo análogos triunfos con el movimiento de la Luna y las perturbaciones de los cometas.

El primero de estos triunfos espectaculares indujo al Rey de Cerdeña a pagar los gastos de Lagrange para que realizara un viaje a París y Londres en 1776. Lagrange tenía 30 años. Se pensó que fuera acompañado por Caraccioli, el Ministro sardo en Inglaterra, pero, al llegar a París, Lagrange cayó peligrosamente enfermo como resultado de un abundante banquete de ricos platos italianos dado en su honor, y se vio forzado a permanecer en la capital francesa, donde conoció a los intelectuales más eminentes, incluyendo al abad Marie, que más tarde había de ser su invariable amigo. El banquete curó a Lagrange de su deseo de vivir en París, y en cuanto se repuso volvió a Turín.

Al fin, el 6 de noviembre de 1776, Lagrange, teniendo treinta años, fue recibido en Berlín por Federico, "el más grande Rey de Europa", como él modestamente se titulaba, quien se iba a honrar al tener en su Corte "al más grande de los matemáticos". Esto último al menos era verdad. Lagrange fue nombrado director de la Sección Físico-Matemática de la Academia de Berlín, y durante 20 años llenó las memorias de la Academia con una serie de trabajos, no estando obligado a pronunciar conferencias.

Al principio, el joven director se encontró en una posición algo delicada. Como es natural, los alemanes se hallaban resentidos al verse pospuestos por los extranjeros, y tenían cierta tendencia a tratarlos con algo menos que una fría cortesía. En efecto, muchas veces se expresaban de un modo insultante. Pero además de ser un matemático de primera categoría, Lagrange era un alma amable y suave, con el raro don de saber cuándo tenía que mantener su boca cerrada. En las cartas a los amigos íntimos se expresa francamente al hablar de los jesuitas, por los cuales tanto él como D'Alembert no sentían simpatía, y en sus informes oficiales a la Academia sobre los trabajos científicos de otros autores suele expresarse con brusquedad. Pero en su trato social piensa en su posición y evita todas las ofensas.

La antipatía innata de Lagrange por todas las disputas se pone de relieve en Berlín. Euler pasaba de una controversia religiosa o filosófica a otra; Lagrange, cuando era acorralado y presionado, siempre anteponía a su réplica su sincera fórmula "*Yo no sé*". Sin embargo, cuando eran atacadas sus propias convicciones sabía oponer una razonada y vigorosa defensa.

En general Lagrange se sentía inclinado a simpatizar con Federico, quien algunas veces se irritaba ante la tendencia de Euler hacia los problemas filosóficos de los cuales nada sabía. "Nuestro amigo Euler, escribe Lagrange a D'Alembert, es un gran matemático, pero un filósofo bastante malo"; y en otra ocasión, al referirse a las efusiones moralizadoras de Euler en las celebradas *Cartas a una Princesa Alemana*, las clasifica como "el comentario de Euler sobre el Apocalipsis", irónica alusión incidental a la indiscreción que Newton se permitió, cuando había perdido su amor por la filosofía natural. "Es increíble -dice Lagrange de Euler- que se pueda ser tan mentecato e infantil en metafísica". Y refiriéndose a sí mismo dice - "Tengo una gran repugnancia por las disputas". Cuando se dedica a filosofar en sus cartas se encuentra un matiz inesperado de cinismo, que falta completamente en las obras por él publicadas, como cuando dice: "He observado siempre que las pretensiones de las gentes están exactamente en razón inversa a sus méritos; éste es uno de los axiomas morales". En materia religiosa, Lagrange fue, si es que era algo, agnóstico.

Federico estaba muy contento con su adquisición y departía amistosamente con Lagrange, exponiendo las ventajas de una vida regular. El contraste ofrecido por Lagrange frente a Euler era particularmente agradable para Federico. El rey se sentía irritado por la excesiva religiosidad y falta de finura cortesana de Euler, a quien llegó a llamar «viejo cíclope de la Matemática", debido a que Euler, en aquella época, había perdido la visión de uno de sus ojos. Con respecto a D'Alembert, el agradecido Federico se desbordaba en prosa y verso: "Gracias a sus, desvelos y a su recomendación -escribía Federico- he podido reemplazar en mi Academia a un matemático tuerto por un matemático con dos ojos, que será especialmente bien recibido en la sección anatómica". A pesar de estas ironías, Federico no era un mal sujeto.

Poco después de haberse establecido en Berlín, Lagrange trajo de Turín a una de sus parientas jóvenes y se casó con ella. Existen dos explicaciones acerca de lo sucedido. Una dice que Lagrange vivía en la misma casa con la muchacha y sus padres, y como tenía una faceta económica en su prudente naturaleza, el matemático se sentía escandalizado por lo que él consideraba extravagancias de la muchacha cuando compraba trajes y adornos. Y empezando por las críticas, acabó por casarse con ella.

La otra versión puede deducirse de una de las cartas de Lagrange, que ciertamente constituye la más extraña confesión de indiferencia que haya sido escrita por un marido joven, al que se supone enamorado. D'Alembert bromeaba con su amigo: "Comprendo que habéis dado lo que nosotros los filósofos llamamos el fatal tropiezo... Un gran matemático debe conocer todas las cosas para calcular su felicidad. No hay duda de que después de haber realizado estos cálculos, encontrareis la solución en el matrimonio".

Lagrange debió tomar muy en serio estas palabras, o quiso contestar a D'Alembert en su propio tono, y lo consiguió. En efecto cuando D'Alembert manifiesta su sorpresa de que Lagrange no haya hecho mención de su matrimonio en sus cartas, Lagrange replicó:

"No sé si he calculado bien o mal, más bien creo que no he hecho ningún cálculo; si como Leibniz me hubiera visto obligado a reflexionar, nunca hubiera podido acomodar mi mente a esa idea. Confieso que jamás he tenido inclinación por el matrimonio... pero las circunstancias me han decidido a elegir una de mis jóvenes parientas para que cuide de mí y de mis asuntos. Si me he olvidado de informaros ha sido porque todo ello me parecía tan falto de importancia que no era digno de que me tomara la molestia de hacerlo".

El matrimonio constituyó una felicidad para ambos, pero la mujer fue atacada de una enfermedad fatal. Lagrange se privaba del sueño para cuidarla, y quedó con el corazón destrozado cuando ella murió.

Se consoló en su obra. "Mis ocupaciones se reducen a cultivar la Matemática, tranquilamente y en silencio". Entonces cuenta a D'Alembert el secreto de la perfección de toda su obra, que ha sido la desesperación de sus sucesores menos reposados. "Como no he trabajado apresuradamente y lo he hecho más por el placer que por el deber, soy como los grandes señores que construyen: hago, deshago y rehago, hasta que quedo suficientemente satisfecho con mis resultados, lo que sucede rara vez". En otra ocasión, después de quejarse de las enfermedades provocadas por el exceso de estudio, dice que es imposible para él reposar: "No he podido modificar mi mal hábito de escribir mis trabajos varias veces, hasta que quedo relativamente satisfecho".

No todos los esfuerzos principales de Lagrange, durante los 20 años de permanencia en Berlín, fueron empleados en la mecánica celeste y en pulir su obra maestra. Una digresión -en los dominios de Fermat- es de particular interés, pues muestra la dificultad inherente que tienen todos los problemas, aun aquellos que parecen simples, en Aritmética. Hasta el gran Lagrange se asombra de los esfuerzos que le cuestan sus investigaciones aritméticas.

"He estado ocupado estos últimos días -escribía a D'Alembert el 15 de agosto de 1768- variando un poco mis estudios con ciertos problemas de Aritmética, y os aseguro que he encontrado muchas más dificultades que las que había supuesto. Existe una, por ejemplo, a cuya solución he llegado tan sólo después de un gran trabajo. Dado un número entero positivo n, que no es un cuadrado perfecto, encontrar un cuadrado entero, x^2, tal que $nx^2 + 1$ sea un cuadrado. Este problema de gran importancia es la teoría de los cuadrados (actualmente formas cuadráticas, que explicaremos al ocuparnos de Gauss) los cuales (los cuadrados) son el objeto principal en el análisis Diofántico. De todos modos he encontrado en esta ocasión algunos teoremas muy bellos de Aritmética, que os comunicaré en otro momento si así gustáis".
El problema que Lagrange describe tiene una larga historia que se remonta a Arquímedes y a los hindúes. El clásico trabajo de Lagrange para que $nx^2 + 1$ sea cuadrado, constituye un jalón en la teoría de números. Lagrange fue también el primero que demostró algunos de los teoremas de Fermat y el de John Wilson (1741-1793), el cual afirma que si p es un número primo, y si todos los números 1, 2,... hasta p - 1 se multiplican entre sí y se añade 1 al resultado, la suma es divisible por p. Esto no es exacto si p no es primo. Por ejemplo, si p = 5, 1 * 2 * 3 * 4 + 1 = 25. Esto puede ser demostrado por razonamiento elemental, y constituye una de esas pruebas de superinteligencia aritmética[1].
En su réplica D'Alembert afirma su creencia de que el análisis diofántico puede ser útil en el Cálculo integral, pero no entra en detalles. Es curioso que la profecía fue cumplida en el, año 1870 por el matemático ruso G. Zolotareff.
Laplace se dedicó también a la Aritmética durante cierto tiempo, y comunicó a Lagrange que la existencia de los teoremas no probados, de Fermat, aunque fuera una de las grandes glorias de la Matemática francesa, era también su falta más notable, siendo deber de los matemáticos franceses enmendar esa falta. Pero profetizó tremendas dificultades. La causa de esas dificultades era, en su opinión, que los problemas sobre lo discontinuo no son abordables con un arma general, como la que el Cálculo infinitesimal proporciona para lo continuo. D'Alembert afirma también que la Aritmética es "más difícil de lo que parece al principio". Estas opiniones de, matemáticos como Lagrange y sus amigos muestran que la Aritmética es realmente difícil.
Otra carta de Lagrange, (28 de febrero de 1769) se refiere a esta cuestión. "El problema de que hablo me ha ocupado mucho más de lo que supuse al principio; pero, finalmente, lo he terminado con felicidad, y creo que no he dejado prácticamente nada sin resolver en la cuestión de las ecuaciones indeterminadas de segundo grado con dos incógnitas". Lagrange era demasiado optimista respecto a esto. Gauss no se había hecho oír aún; todavía tenían que transcurrir siete años, antes de que sus padres se unieran. Dos años antes del nacimiento de Gauss (1777) Lagrange se expresa respecto de su obra de un modo pesimista.

> "Las investigaciones aritméticas son las que me han costado mayor trabajo y son quizá las de menor valor".

Cuando se sentía bien, Lagrange rara vez incurrió en el error de subestimar la "importancia de su obra". "Siempre he considerado la Matemática -escribía a Laplace en 1777- como un objeto de diversión más

[1] Un "problema" ridículo de un caballero español posee la gracia suficiente para ser citado. La abreviatura habitual de 1 * 2 * ... * n es n! Ahora bien, p - 1 + 1 = p, que es divisible por p. Añádase el signo de admiración (p - 1)! + 1! = p! La primera parte es también divisible por p; de aquí (p - 1)! + 1 es divisible por p. Por desgracia este razonamiento es también valedero si p no es primo.

que de ambición, y puedo aseguramos que gozo con “Las investigaciones aritméticas son las que me han costado mayor trabajo y son quizá las de menor valor".

Cuando se sentía bien, Lagrange rara vez incurrió en el error de subestimar la "importancia de su obra". "Siempre he considerado la Matemática -escribía a Laplace en 1777- como un objeto de diversión más que de ambición, y puedo aseguramos que gozo con las obras de los demás mucho más que con la mía propia de la que nunca estoy satisfecho". Estas palabras constituyen una réplica a la declaración algo pomposa hecha por Laplace de que trabajaba en Matemática tan sólo para calmar su sublime curiosidad, y no para dar una ocasión a los aplausos de la "multitud".

Una carta de 15 de septiembre de 1782 dirigida a Laplace, tiene gran interés histórico, pues habla de la terminación de la *Mécanique analytique*: "He completado casi totalmente un tratado sobre mecánica analítica, fundado tan solo sobre el principio o fórmula de la primera sección de la memoria adjunta; pero no sé cuándo y dónde podré imprimirlo, y no me apresuro para dar los toques finales".

Legendre emprendió la impresión de la obra, y un viejo amigo de Lagrange, el abad Marie persuadió finalmente a un editor de París a que corriera el riesgo de la publicación. Este prudente sujeto consintió en comenzar la impresión tan sólo cuando el abad prometió comprarle los ejemplares que no fueran vendidos después de cierta fecha. El libro no apareció hasta 1788, después de que Lagrange había dejado Berlín. Un ejemplar cayó en sus manos cuando su indiferencia para la ciencia y para la Matemática era tan grande que ni siquiera se dignó abrir el libro. Poco le importaba.

Una investigación realizada durante el período en que Lagrange estuvo en Berlín tiene suma importancia para el desarrollo del Álgebra moderna; nos referimos a la memoria, de 1767, Sobre la resolución *de las ecuaciones* numéricas, y a las subsiguientes adiciones que se ocupan del problema general de la resolución algebraica de las ecuaciones. Es posible que la mayor importancia de las investigaciones de Lagrange sobre la teoría y resolución de las ecuaciones resida en que inspiró a los algebristas más eminentes de los primeros años del siglo XIX. Repetidamente vemos que cuando se trata de problemas que han ocupado a los algebristas durante tres siglos o más, los algebristas modernos se dirigen a Lagrange para encontrar ideas e inspiración. Lagrange no llegó a resolver la dificultad central, la de las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación dada se pueda resolver algebraicamente, pero el germen de la solución se encuentra en su obra.

Como este problema es una de las cosas esenciales del Álgebra que se pueden explicar sencillamente, podremos examinarlo rápidamente. Además, se repite muchas veces como motivo esencial en la obra de algunos de los más grandes matemáticos del siglo XIX**,** Cauchy, Abel, Galois, Hermite y Kronecker, entre otros.

El primer término puede subrayarse que no existe dificultad para resolver una ecuación algebraica de coeficientes enteros. El trabajo puede ser muy grande si la ecuación es de grado elevado. Por ejemplo:

$$3\, x^{101} - 17.3\, x^{70} + x - 11 = 0$$

pero existen muchos métodos sencillos, siempre que pueda encontrarse una raíz de tal ecuación numérica con el grado prescripto de aproximación. Algunos de esos métodos se enseñan en los cursos ordinarios de Álgebra. Pero en los días de Lagrange los métodos uniformes para resolver ecuaciones numéricas con un cierto grado de aproximación no eran comunes, si es que en realidad existían. Lagrange proporcionó ese método. Teóricamente encontró lo que se requería, pero el método no era práctico. Ningún ingeniero que se enfrente actualmente con una ecuación numérica, piensa en utilizar el método de Lagrange.

El problema realmente significativo surge cuando buscamos una solución *algebraica* de una ecuación de coeficientes *literales,* o sea $ax^2 + bx + c = 0$, o $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, y así sucesivamente para grados superiores al tercero. Lo que se requiere es una serie de fórmulas que expresen la incógnita x en función de los coeficientes $a, b, c,...$ tales que si se coloca una de esas expresiones en lugar de x en el primer miembro de la ecuación, lo reduzca a 0. En una ecuación de grado n la incógnita x tiene precisamente n valores. Así, para la ecuación de segundo grado son dos los valores

$$\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right), \frac{1}{2a}\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)$$

que sustituidos en vez de x reducirán $ax^2 + bx + \text{c}$ a cero. *Los valores pedidos de x* en cualquier *caso estarán expresados* en función, de *los coeficientes a, b, c,... por medio de tan sólo* un número finito *de adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíces.* Este es el problema. ¿Tiene solución? La respuesta no fue dada hasta después de veinte años de la muerte de Lagrange, pero la clave se encuentra fácilmente en su obra.

Como un primer paso hacia una teoría comprensiva, Lagrange hizo un estudio completo de todas las soluciones dadas por sus predecesores para las ecuaciones generales de los cuatro primeros grados, y consiguió demostrar que todas las estratagemas en cuya virtud pueden ser obtenidas las soluciones son sustituibles por un procedimiento uniforme. Un detalle en este método general contiene la clave mencionada. Supongamos una expresión algebraica que contenga las letras *a, b, c*... ¿cuántas expresiones diferentes pueden derivarse de la expresión dada si sus letras se permutan de todas las formas posibles? Por ejemplo, de $ab + cd$ pasamos a $ad + cb$ permutando *b y d,* problema que sugiere otro íntimamente relacionado con la clave que Lagrange estaba buscando. ¿Qué permutación de letras hará que la expresión dada resulte invariante? Así $ab + cd$ se transforma en $ba + cd$ por la permutación de a *y b,* que es lo mismo que $ab + cd$ puesto que $ab = ba$. De estas cuestiones se origina la teoría *de grupos finitos.* Esta ha sido la clave de la cuestión de la resolución algebraica, que será repetida cuando hablemos de Cauchy y Galois.

Otro hecho significativo aparece en la investigación de Lagrange. Para los grados 2, 3, y 4, la ecuación algebraica general se resuelve haciendo depender la solución de la de una ecuación de grado inferior que la que está en discusión. Esto sirve perfectamente para ecuaciones de grados 2, 3, 4, pero cuando se intenta un proceso similar en la ecuación general de grado 5,

$$ax^5 + bx^4 + ex^3 + dx^2 + ex + f = 0,$$

la ecuación *resolvente* en lugar de ser de grado menor que 5, resulta de grado 6, con lo que la ecuación dada se reemplaza por otra más difícil. El método *que es útil para los grados 2, 3, 4, fracasa para el 5,* y a no ser que exista un medio de evitar el confuso 6, el camino queda bloqueado.

Como veremos no hay forma de obviar la dificultad. Podríamos también intentar cuadrar el círculo o trisecar un ángulo con los métodos euclidianos.

Después de la muerte de Federico el Grande (17 agosto de 1786) el resentimiento contra los no prusianos y la indiferencia para la ciencia hizo de Berlín un lugar poco cómodo para Lagrange y los miembros extranjeros de la Academia, por lo cual intentó ausentarse. Le fue concedido el permiso, con la condición de que continuara enviando memorias a la Academia durante cierto número de años, a lo que Lagrange accedió. Con satisfacción aceptó la invitación de Luis XVI, para que continuara, sus trabajos matemáticos en París, como miembro de la Academia francesa. A su llegada a París, en 1787, fue recibido con el mayor respeto por la familia real y por la Academia. Le habían sido preparadas habitaciones cómo das en el Louvre, y allí vivió hasta la Revolución, llegando a ser favorito de María Antonieta seis años antes de que ésta terminara en la guillotina. La reina tenía 19 años menos que Lagrange, pero parecía comprenderle e hizo todo cuanto pudo para aliviar su invencible depresión.

A la edad de 51 años Lagrange, sintió que todo había terminado. Era un caso claro de agotamiento nervioso por el trabajo excesivo y continuado. Los parisienses encontraron en él un, conversador amable y suave, pero jamás ocupaba el primer plano. Hablaba poco y parecía distraído y profundamente melancólico. En las reuniones de los hombres de ciencia convocadas por Lavoisier, Lagrange parecía estar ausente, y, aproximándose a la ventana volvía la espalda a los invitados, que habían venido a honrarla, con un gesto de triste indiferencia. Se decía a sí mismo que su entusiasmo se había extinguido y que había perdido el amor a la Matemática. Cuando alguien aludía al hecho de que algún matemático estaba dedicado a alguna importante investigación, respondía: "Mucho mejor; yo la comencé, no tendré que terminarla". La *Mécanique Analytique* permaneció sin abrir sobre su mesa durante dos años.

Sintiendo antipatía por todo lo que oliera a Matemática, Lagrange dirigió ahora su atención a lo que consideraba verdaderamente interesante, lo mismo que Newton hizo después de los *Principia*, la metafísica**,** la evolución del pensamiento humano, la historia de las religiones, la teoría de las lenguas, la medicina y la botánica. En esta extraña miscelánea sorprendía a sus amigos con sus extensos conocimientos y la profundidad de su talento en materias ajenas a la Matemática. En aquella época la química había venido a ser casi una ciencia, a diferencia de la alquimia que la había precedido, gracias a los esfuerzos de Lavoisier (1743-1794), íntimo amigo de Lagrange. En el sentido que cualquier estudiante de química elemental podrá apreciar, Lagrange declaró que Lavoisier había hecho la química "tan fácil como el Álgebra".

Lagrange consideraba que la Matemática había terminado, o al menos se hallaba en un período de decadencia. Preveía que la química, la física y la ciencia en general, serían las actividades futuras que despertarían mayor interés entre los hombres de talento, y hasta predijo que las cátedras de Matemática en las Academias y Universidades llegarían a descender hasta el nivel impreciso en que se hallaban entre los árabes. En cierto sentido tenía razón. Si Gauss, Abel, Galois, Cauchy, y otros sabios no hubieran forjado nuevas ideas en la Matemática, el impulso dado por Newton se habría agotado hacia el año 1850. Felizmente Lagrange vivió lo suficiente para ver cómo Gauss iniciaba su gran carrera, y para darse cuenta de que sus temores habían sido infundados. Actualmente podemos sonreírnos del pesimismo de Lagrange, al pensar que la era anterior a 1800 fue sólo la aurora de la moderna Matemática en cuya mañana estamos viviendo, quizá no lejos de la hora del mediodía. De todos modos, esto es un buen ejemplo que nos enseña la inutilidad de hacer profecías.

La Revolución puso término a la apatía de Lagrange, y galvanizó una vez más su interés por la Matemática. Como punto de referencia podemos recordar el 14 de julio de 1789, día en que la Bastilla cayó.

Cuando los aristócratas franceses y los hombres de ciencia se dieron al fin cuenta de lo que ocurría, aconsejaron a Lagrange que volviera a Berlín donde le esperaba una buena acogida. No se hubiera hecho ninguna objeción a su partida; pero Lagrange se negó a abandonar París, diciendo que prefería continuar allí y ver en qué paraba el experimento". Ni él ni sus amigos previeron el Terror, y cuando se inició Lagrange lamentaba amargamente no haberse ausentado cuando ya era demasiado tarde para escapar. No temía por su propia vida.

En primer lugar, porque siendo semi extranjero se hallaba más o menos a salvo, y en segundo lugar porque no daba gran valor a su vida. Pero las crueldades revolucionarias le enfermaban y acabaron por destruir la poca fe que aun tenía en la naturaleza humana y en el sentido común. "*Tu l'as voulu*" ("Tú lo has querido), se repetía al ver cómo se producía una atrocidad tras otra y darse cuenta de su error de querer ser testigo de los inevitables horrores de una revolución.

Los grandiosos planes de los revolucionarios para la regeneración de la humanidad y para reformar la naturaleza humana le dejaban frío. Cuando Lavoisier subió a la, guillotina, Lagrange expresó su indignación por la estupidez de la ejecución. "Bastará sólo un momento para que su cabeza caiga, y quizá sea necesario un centenar de años, para que se produzca otra igual". Pero los ciudadanos ultrajados y oprimidos condenaron al *fermiér* Lavoisier diciendo que "el pueblo no tenía necesidad de ciencia", cuando precisamente las contribuciones del gran químico a la ciencia eran una buena razón para dejar su cabeza sobre sus hombros.

Aunque prácticamente toda la obra de Lagrange tuvo lugar bajo el patronato de la realeza, sus simpatías no estaban con los realistas. Tampoco estaban con los revolucionarios. Se mantenía ecuánimemente en un punto medio cuando la crueldad había invadido ambos campos. Podía simpatizar con el pueblo, que había sido ultrajado más allá de la tolerancia humana, y deseaba que triunfase en su lucha para obtener mejores condiciones de vida. Pero su mente era demasiado realista para quedar impresionada por cualquiera de los planes quiméricos, forjados por los conductores del pueblo para mejorar la miseria humana, y se negaba a creer que la preparación de tales planes era prueba indudable de la grandeza de la mente humana, como proclamaban los entusiastas guillotinadores. "Si deseáis ver una mente verdaderamente grande, decía, examinad el estudio de Newton cuando descompuso la luz blanca o levantó el velo del sistema del mundo".

Los revolucionarios le trataron con notable tolerancia. Mediante un decreto especial le concedieron una pensión y cuando la inflación del papel moneda redujo esta pensión a la nada, le nombraron miembro del Comité de Invenciones para aumentar su sueldo, y también del Comité del sistema de la moneda. Cuando fue establecida la *Êcole Normale* en 1795, cuya existencia fue efímera), Lagrange fue nombrado profesor de Matemática. Cuando se cerró la Normal y se fundó en 1797 la gran *Êcole Polytechnique*, Lagrange organizó el curso de Matemática y fue el primer profesor. Jamás se había dedicado a la enseñanza de ese tipo de estudiantes mal preparados. Adaptándose a ellos, Lagrange llevó a sus discípulos a través de la Aritmética y el Álgebra hasta el Análisis, pareciendo más bien un compañero que un maestro. El gran matemático de la época vino a ser un gran profesor, que preparó a los jóvenes ingenieros militares de Napoleón para que tomaran parte en la conquista de Europa. La sagrada superstición de que un hombre que sabe alguna cosa es incapaz de enseñarla, había quedado destruida. Lagrange desarrollaba la nueva Matemática ante los ojos de sus discípulos, y ellos mismos tomaban parte en ese desarrollo.

Dos obras realizadas en esta época iban a ejercer gran influencia sobre el Análisis de las primeras tres décadas del siglo XIX. Los discípulos de Lagrange tropezaban con dificultades ante los conceptos de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande que impregnaban la forma tradicional del cálculo. Para eliminar estas dificultades Lagrange emprendió el desarrollo del Cálculo sin el uso de los infinitésimos de Leibniz y sin la concepción peculiar de Newton de límite. Su propia teoría fue publicada en dos obras, la *Teoría de las funciones analíticas* (1797) y *las Lecciones sobre el calculo defunciones* (1801). La importancia de estas obras no reside en su Matemática, sino en el impulso que dieron a Cauchy y otros autores para construir un cálculo satisfactorio. Lagrange fracasó completamente. Pero al decir esto debemos recordar que inclusive en nuestros días las dificultades con que Lagrange luchó infructuosamente no han sido completamente vencidas. Se trataba de un ensayo notable y para su época, satisfactorio.

La obra más importante de Lagrange durante el período revolucionario fue su intervención para perfeccionar el sistema métrico decimal de pesos y medidas. Se debe a la ironía y al sentido común de Lagrange que no fuera elegido el número 12 como base, en lugar del 10. Las “ventajas" del 12 son manifiestas, y continúan presentándose actualmente en los razonamientos de algunos graves propagandistas, que sólo por un pelo, han escapado de pertenecer a la confraternidad de la cuadratura del círculo. La base 12 impuesta sobre la decimal de nuestro sistema numérico sería una llave hexagonal en una cerradura pentagonal. Para hacer recobrar la cordura a los caprichosos que preferían la base 12, Lagrange propuso como mejor la de 11. Cualquier número primo tendría la ventaja de dar el mismo denominador a todas las fracciones del sistema. Las desventajas son numerosas y suficientemente evidentes para cualquiera que comprenda lo que es una pequeña división. El Comité estuvo de acuerdo y eligió el 10.

Laplace y Lavoisier fueron miembros del Comité primeramente constituido, pero tres meses más tarde se les sustituyó en sus cargos por otros hombres. Lagrange continuó siendo presidente. "No sé por qué me mantienen", hacía notar, sin darse cuenta en su modestia de que su don para comprender el valor del silencio le había salvado, no sólo para permanecer en su cargo, sino también para salvar la vida.

A pesar de todos estos interesantes trabajos, Lagrange continuaba solitario e inclinado al desaliento. En este crepúsculo entre la vida y la muerte fue salvado, cuando tenía 56 años, por una muchacha que tenía aproximadamente cuarenta años menos, la hija de su amigo el astrónomo Lemonnier. La muchacha estaba conmovida por la infelicidad de Lagrange, e insistió en casarse con él. Lagrange accedió, y en oposición a todas las leyes que pueden gobernar las relaciones entre un hombre y una mujer joven, el matrimonio resultó ideal. La joven no sólo se dedicó devotamente a su marido, sino que además era inteligente, pues volvió a despertar en él su deseo de vivir. Por su parte, Lagrange hizo con gusto muchas concesiones, y acompañó a su mujer a bailes a que jamás hubiera asistido de haber permanecido viudo. Se acostumbró tanto a ella, que no podía permanecer solo, y durante sus breves ausencias, cuando salía a realizar algunas compras, quedaba entristecido.

Hasta en esta nueva felicidad, Lagrange conservó su posición curiosamente desinteresada frente a la vida, y una perfecta honradez en lo que se refiere a sus propios deseos. "No tengo hijos de mi primer matrimonio decía, no *sé si* los tendré en mi segundo. Apenas lo deseo". De todos sus triunfos, el que valoraba más, según decía con sencillez y sinceramente era haber encontrado una compañera tan cariñosa y tierna como su joven esposa.

Francia derramó honores sobre él. El hombre que había sido favorito de María Antonieta iba a ser ahora un ídolo del pueblo que pensó en darle muerte. En 1796 cuando Francia se anexionó el Piamonte, Talleyrand recibió la orden de visitar al padre de Lagrange, que aun vivía en Turín, para decirle: "Vuestro hijo, de quien el Piamonte tiene el orgullo de ser la cuna y Francia de poseer, ha hecho honor a toda la humanidad por su genio". Cuando Napoleón se dedicaba a los problemas civiles entre sus campanas, habló muchas veces con Lagrange sobre cuestiones filosóficas y sobre la función de la

Matemática en un estado moderno, y respetó extraordinariamente a este hombre de palabra suave, que siempre pensaba antes de hablar y que jamás era dogmático.

Bajo su reservada calma Lagrange ocultaba una ironía que inesperadamente afloraba en ocasiones. Algunas veces esa ironía era tan sutil que hombres más vulgares, Laplace por ejemplo, no se daba cuenta de adonde iba dirigida. Una vez, en defensa del experimento v la observación frente a la simple teorización vaga y confusa, Lagrange hizo rotar: "Estos astrónomos son muy curiosos, no creen en una teoría a no ser que esté de acuerdo con sus observaciones". Al observar su éxtasis durante un concierto musical, alguien le preguntó por qué amaba la música. "Amo la música debido a que me aísla -replicó- oigo los tres primeros compases, y al cuarto ya no oigo nada. Me entrego a mis pensamientos, nada me interrumpe y así es como he resuelto más de un problema difícil". Hasta su sincero respeto por Newton tenía un débil matiz de la misma suave ironía. "Newton -declaraba- fue seguramente el hombre de genio por excelencia, pero debemos reconocer que fue también el más feliz: sólo una vez puede quedar establecido el sistema del mundo". Y en otra ocasión afirmó: "Cuán feliz fue Newton, ya que en su época el sistema del mundo no había sido aun descubierto".

El último esfuerzo científico de Lagrange fue la revisión y ampliación de la *Mécanique analytique* para una segunda edición. Aunque había cumplido los setenta años, gozó de su antigua capacidad. Volviendo a sus primeros hábitos, trabajó incesantemente hasta que pudo descubrir que su cuerpo ya no era capaz de obedecer a su mente. Por entonces comenzó a sentir desmayos, especialmente al levantarse de la cama. Un día su mujer lo encontró inconsciente sobre el suelo, con la cabeza herida por haber tropezado con el borde de una mesa. Desde entonces moderó su actividad, pero se mantuvo trabajando. Sabía que su enfermedad era grave, pero esto no alteró su serenidad. Lagrange vivió siempre como un filósofo, indiferente a su destino.

Dos días antes de su muerte, Monge y otros amigos le visitaron sabiendo que estaba moribundo y que deseaba decirles algo acerca de su vida. Le encontraron temporalmente mejor, salvo algunas pérdidas de memoria que le impedían recordar lo que deseaba decirles.

"Ayer estuve muy enfermo -dijo Lagrange-, creí que iba a morir; mi cuerpo se debilita poco a poco y mis facultades intelectuales y físicas se extinguen insensiblemente. Observo la gradual disminución de mi vigor y llego al fin sin pena, sin lamentos, y por una lenta declinación. No temo a la muerte, y cuando viene sin dolor es una última f unción que no es desagradable".

Creía que el asiento de la vida se halla en todos los órganos, en el conjunto de la máquina corporal, que, en su caso, se debilitaba igualmente en todas sus partes.

"En pocos momentos todas las funciones se suspenden, la muerte tiene lugar en todas las regiones; la muerte es tan sólo el reposo absoluto del cuerpo.

"Deseo morir; sí, deseo morir, y encuentro un placer en ello. Pero mi mujer no quiere. En estos momentos preferiría una mujer menos buena, menos ávida de revivir mi vigor, que me dejara terminar suavemente. Ha terminado mi carrera. He obtenido alguna celebridad en Matemática. No he odiado a nadie. No he hecho ningún mal y es hora de terminar, pero mi mujer no quiere".

Pronto se cumplió su deseo. Poco después de que sus amigos le abandonaran se produjo un desmayo del que no despertó. Murió en las primeras horas de la mañana del 10 de abril de 1813, teniendo 76 años.